БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан
Абрашина-Жадаева Н. Г.	физического факультета
	Анищик В.М.
__________11 сентября 2014 г.	__________11 сентября 2014 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Для специальностей:
1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность)
1-31 04 01-03 Физика (научно-педагогическая деятельность)
1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность)

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Кашевский В. В.

Минск
2014

УДК 517
М 34

Решение о депонировании документа вынес
Ученый Совет физического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 1 от 11.09.2014 г.)

Составитель: доцент кафедры высшей математики и математической физики БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент Кашевский В.В.

Рецензенты:

Василец С. И., кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики физического факультета БГПУ им. М. Танка;

Горбацевич А. К., доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики и астрофизики БГУ.

Математический анализ : электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математический анализ» для специальностей : 1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность), 1-31 04 01-03 Физика (научно-педагогическая деятельность), 1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность) / БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики ; сост. В. В. Кашевский. – Минск : БГУ, 2014. – 164 с. : ил. – Библиогр.: с. 156–157, 163–164.

Реферат (аннотация): Учебно-методический комплекс «Математический анализ» подготовлен в соответствии с типовой учебной программой от 12 сентября 2013 г. в целях учебно-методического обеспечения студентов БГУ по специальности 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)», получающих образование в очной форме. УМК составлен по модульной системе. Основная часть комплекса разбита на девять модулей. Каждый модуль содержит основные теоретические сведения по соответствующему разделу программы, примеры решения важных задач, а также контрольные вопросы. Последовательное усвоение всех модулей поможет студенту освоить программу курса «Математический анализ».

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Математический анализ занимает центральное место в системе математической подготовки студентов физических специальностей, являясь фундаментом для изучения основ векторного и тензорного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики. Методы и аппарат математического анализа широко используются в курсах общей и теоретической физики.

Цель дисциплины — глубокое овладение фундаментальными понятиями предельного перехода, операциями дифференцирования и интегрирования в одномерном и многомерном случаях, а также прочными навыками их использования в смежных математических курсах при решении конкретных прикладных задач.

Основная задача изучения дисциплины — обеспечить глубокую общематематическую подготовку студентов физических специальностей, выработать навыки решения и исследования типовых задач математического анализа.

Программа учитывает многолетний опыт преподавания математического анализа на физическом факультете и факультете радиофизики и электроники Белорусского государственного университета. Изложение основных тем программы определяются характером вуза и наличием соответствующих технических средств обучения. В лекционном курсе следует по мере необходимости использовать современные компьютерные технологии и технические средства обучения.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия теории пределов;

– дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и многих переменных и их приложения;

уметь:

– находить пределы последовательностей и функций;

– вычислять производные и интегралы от элементарных функций;

– исследовать сходимость несобственных интегралов и рядов;

– использовать аппарат математического анализа при изучении физических явлений;

владеть:

– навыками применения математического инструментария для решения научно-практических задач.

Для организации самостоятельной работы студентов по дисциплине рекомендуется использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, основной теоретический материал, методические указания к практическим занятиям, список литературы и др.).

Результативность самостоятельной работы студентов рекомендуется проверять в ходе текущего и итогового контроля знаний в форме устного опроса, коллоквиумов, контрольных работ, тестового компьютерного контроля по темам и разделам дисциплины. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала следует использовать накопительную рейтинговую систему.

По дисциплине предусмотрены 4 контрольных работы и 2 коллоквиума.

По каждому разделу лекционного курса предусмотрены практические занятия.

Общее количество часов, отводимых на данную программу – 268 часов, аудиторное количество часов – 148, из них: лекции – 74 часа, практические занятия –66 часов, управляемая самостоятельная работа –8часов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (1 семестр)

Теория пределов

Основные сведения о действительных числах. Бином Ньютона. Точные границы числовых множеств. Комплексные числа. Разложение многочленов на множители. Рациональные дроби. Числовые последовательности. Предел последовательности. Основные свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Число e .Предельные точки последовательности. Критерий сходимости последовательности. Предел последовательности комплексных чисел. Два определения предела функции и их равносильность. Свойства пределов функций. Односторонние и несобственные пределы. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Критерий Коши. Замечательные пределы. Непрерывные функции. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность.

Основы дифференциального исчисления

Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Дифференциал. Основные правила дифференцирования. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференциальные теоремы о среднем. Раскрытие неопределенностей. Формула Тейлора. Различные виды остаточного члена. Формулы Тейлора элементарных функций. Признаки монотонности функции. Локальный и глобальный экстремумы. Выпуклость кривой и точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема построения графика функции.

Интегральное исчисление функций одной переменной.

Первообразная и неопределенный интеграл. Табличные интегралы. Основные методы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей. Метод рационализации. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Теоремы о среднем. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Конечномерные пространства. Предел функции многих переменных. Повторные пределы. Непрерывные функции многих переменных и их свойства. Частные производные. Дифференцируемые функции. Производные и дифференциалы сложных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных. Экстремумы.

Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

Несобственные интегралы первого и второго рода. Простейшие свойства несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Непрерывность интегралов, интегрирование и дифференцирование по параметру. Интегралы Эйлера.

Теория рядов.

Числовые ряды. Основные свойства сходящихся рядов. Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки абсолютной сходимости. Знакочередующиеся ряды и теорема Лейбница. Действия над рядами. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряды Тейлора элементарных функций.

Рекомендации по изучению курса математического анализа.

Курс разбит на семь модулей:

Модуль № 1. Введение в анализ

Модуль № 2. Последовательности

Модуль № 3. Предел функции

Модуль № 4. Производная

Модуль № 5. Формула Тейлора и графики функций

Модуль № 6. Интеграл

Модуль № 7. Функции многих переменных

Модуль № 8. Несобственные интегралы

Модуль № 9. Ряды

В конце каждого модуля приводится список вопросов. Цель таких вопросов — дать возможность студенту самостоятельно проконтролировать степень усвоения каждого модуля.

ВАЖНО. Изучая любой модуль, очень важно самостоятельно решать типичные задачи. Более полное представление о решении задач каждого модуля можно получить, рассматривая примеры с решением. Задачи выбраны не самые простые, поэтому необходимо внимательно изучить их решения.

После того как изучен материал модуля студент должен: а) понимать связи между основными результатами и понятиями математического анализа; б) уметь давать ответы на контрольные вопросы; в) решать основные типы задач каждого модуля.

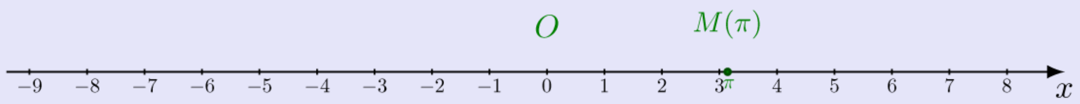
Модуль № 1. Введение в анализ. Часть первая

Для усвоения курса математического анализа требуются некоторая математическая культура. Необходимо:

- знать числовую прямую с единицей масштаба и действительные числа, которые соответствуют каждой точке числовой прямой, а

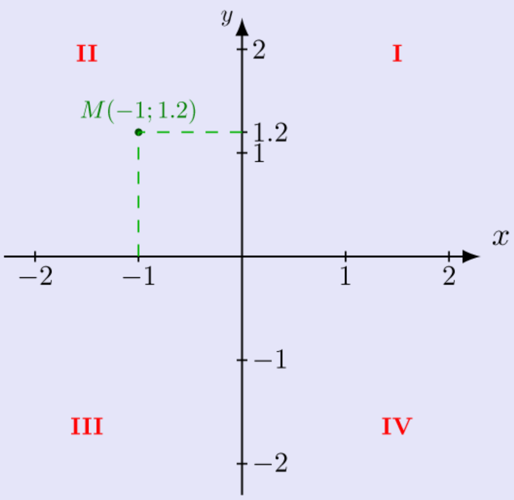
также координатную плоскость;
- уметь находить площадь круга, треугольника, площадь поверхности и объём шара;
- знать теоремы синусов и косинусов;
- из тригонометрии обязательно знать формулы для косинуса суммы аргументов и аналогичную формулу для синуса суммы;
- уметь делить многочлен на многочлен столбиком или методом неопределенных коэффициентов;
- правильно обращаться с дробями;
- строить простейшие графики.

числовая прямая



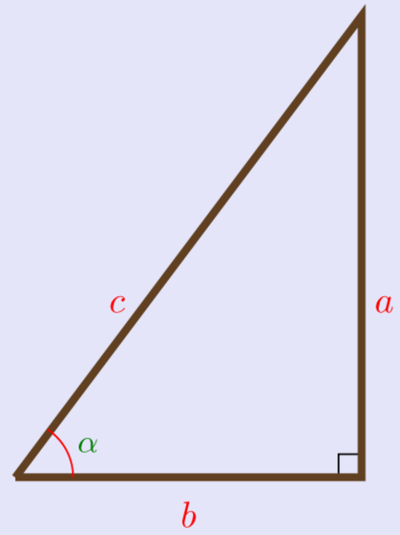
Расстояние между точками $M(x_1)$ и $N(x_2)$ обозначим $\rho(M,N) = |x_1 - x_2|$. Ясно, что $\rho(M,O) = |x_1|$

координатная плоскость



Расстояние между $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ будет $\rho(M,N) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$

прямоугольный треугольник



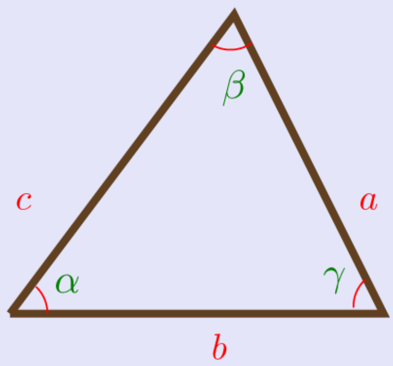
Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Связь сторон и углов:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ b = c\cos\alpha,\ a = c\sin\alpha$$

треугольник общего вида



Площадь треугольника: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Формулы суммы (разности) аргументов

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Понижение степени

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Разность функций

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

кратные углы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

дроби

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

примеры

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6};$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$$

деление многочленов

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+0x^3+0x^2+1x+1 & x^2+0x+1 \\
-\ \underline{x^4+0x^3+1x^2} & \overline{x^2-1} \\
-x^2+1x+1 & \\
-\ \underline{-x^2-0x-1} & \\
x+2 &
\end{array}
$$

метод неопределенных коэффициентов

$x^4+x+1=(x^2+1)(ax^2+bx+c)+dx+f$

$$
\begin{cases}
x^4: a=1\\
x^3: b=0\\
x^2: a+c=0\\
x^1: b+d=1\\
x^0: f+c=1
\end{cases}
$$

модуль

$$
|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0,\\ -a, & a\leq 0.\end{cases}
$$

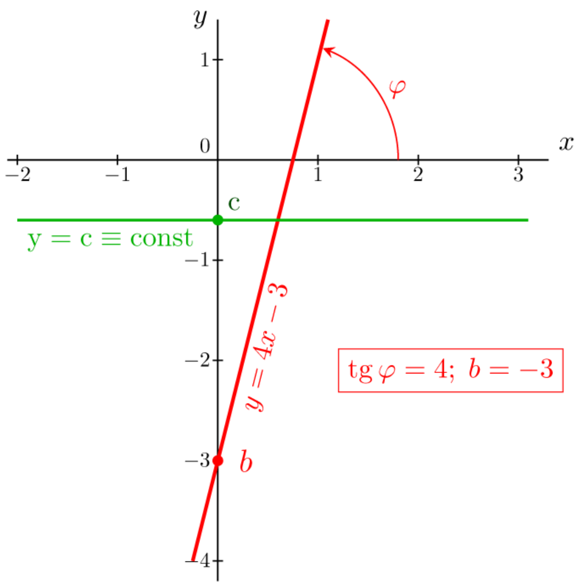
модуль и его свойства

$$
|ab|=|a||b|;\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|};\ \sqrt{a^2}=|a|;\ |-a|=|a|
$$

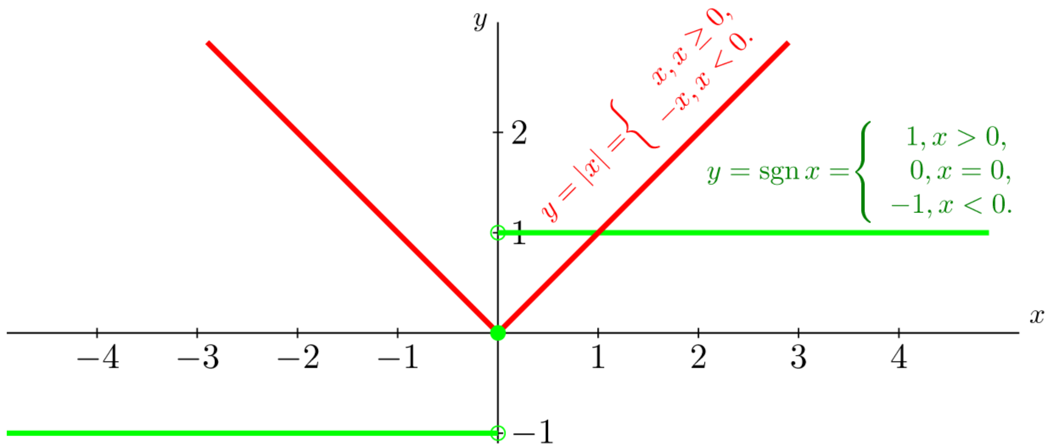
модуль-важное неравенство (оценка сверху и снизу)

$$
||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|
$$

график прямой (линейная функция)

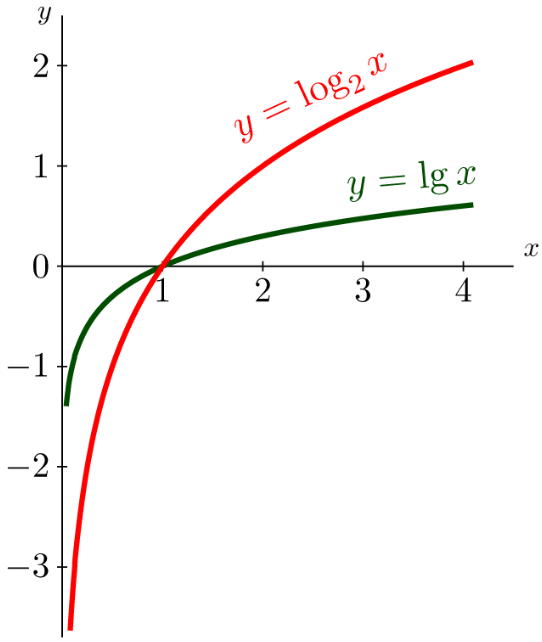


модуль и функция сигнум (знак)



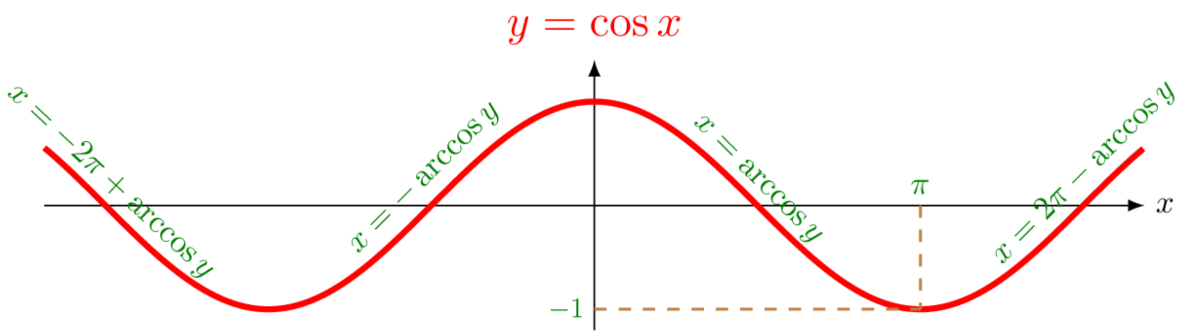
$$\boxed{|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x}$$

два логарифма

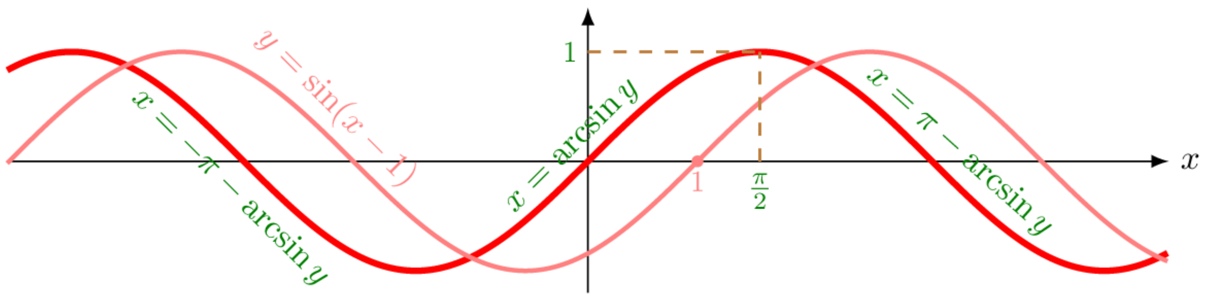


$$\boxed{\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2}; \quad \lg 2 \approx 0,301}$$

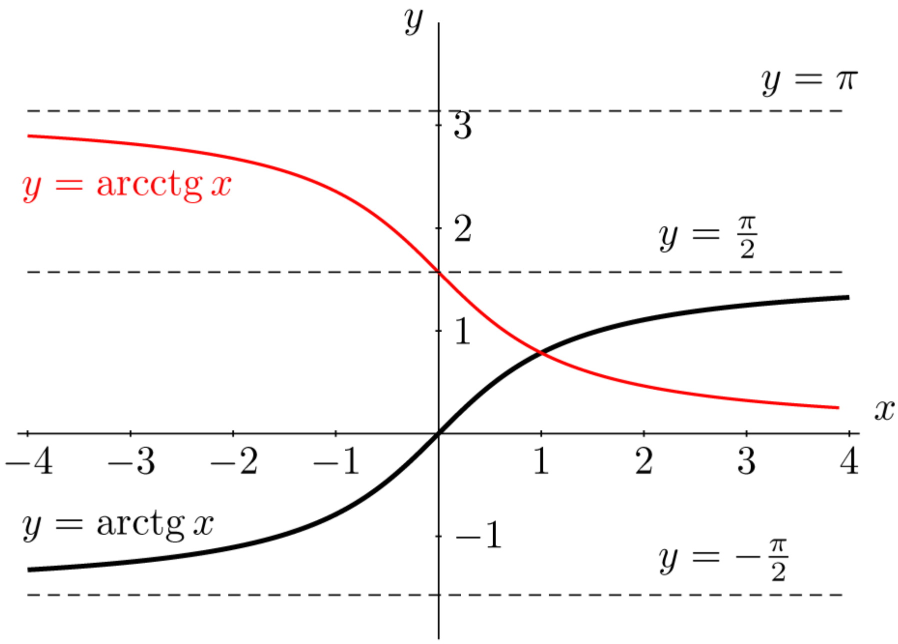
косинус и обратная функция



синус и обратная функция



арктангенс и арккотангенс



$$\boxed{\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arcctg}\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Контрольные вопросы по элементарной математике

- ✓ Что больше $\frac{99}{100}$ или $\frac{100}{101}$?
- ✓ $91^2 - 81^2 = ?$
- ✓ Дробь 1/7 разложить в периодическую десятичную дробь.
- ✓ Что больше $0{,}8$ или $0{,}7(9)$?
- ✓ Может ли x быть больше, чем $10x$? Что больше a или a^2?
- ✓ Чему равны объём шара и площадь поверхности шара?
- ✓ Записать формулу для площади треугольника по трем сторонам.

- ✓ Изобразить на плоскости (x, y) фигуру $x^2 + y^2 = y$.
- ✓ Верны ли равенства $\arcsin x = 3$; $\arccos x = 3$; $\operatorname{arctg} x = 3$?
- ✓ Как получить график $y = \sin(x + \pi)$ из графика $y = \sin x$?
- ✓ Существует ли такой угол x, что $\sin x \cos x = \sin 40^\circ$?

Модуль № 1. Введение в анализ. Часть вторая

Необходимо освоить некоторые новые элементарные понятия и формулы:

- уметь обращаться со знаком суммы;
- понимать факториал, как произведение последовательных натуральных чисел, начиная с единицы;
- знать сочетания и перестановки элементов конечного множества;
- освоить формулу бинома Ньютона;
- уметь обращаться с комплексными числами;
- освоить простейшие понятия математической логики и теории множеств.

Длинная сумма и краткая ее запись

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+
+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+
+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+
+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+
+60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+
+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+
+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100 =

$$= \sum_{k=1}^{100} k = 5050$$

Здесь k — индекс суммирования (немой, фиктивный), а знак $\sum$ произносится как "сигма".

Пример1

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv \sum_{k=1}^{3} x_k$$

Пример2

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv \sum_{k=0}^{2} x_{k+1}$$

Пример3

$$x_{1m} + x_{2m} + x_{3m} \equiv \sum_{k=1}^{3} x_{km};$$

Обратите внимание на следующую сумму!

$$2+2+2+2+2+2+2 \overset{!}{\equiv} \sum_{k=1}^{7} 2$$

Три свойства сумм:

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = \sum_{k=1}^{5} x_k + \sum_{k=6}^{10} x_k$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left(x_k + y_k\right) = \sum_{k=1}^{10} x_k + \sum_{k=1}^{10} y_k; \quad \sum_{k=1}^{10} \left(7x_k\right) = 7\sum_{k=1}^{10} x_k$$

Разные обозначения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k \equiv \sum_{1,,\,k,,\,n} x_k \equiv \sum_{0,,\,k,,\,n-1} x_{k+1}$$

Двойная сумма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \equiv \sum_{1\le i\le n,1\le j\le m} x_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \equiv x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}$$

Геометрическая прогрессия и ее сумма:

$$\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} q^k \equiv \frac{1-q^n}{1-q}, q \ne 1,}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \equiv \sum_{i=0}^{4} q^i \equiv \frac{1-q^5}{1-q} = \frac{q^5-1}{q-1}$$

Арифметическая прогрессия и ее сумма:

$$\boxed{a + \left(a+d\right) + \left(a+2d\right) + \ldots + \left(a+(n-1)d\right) = \frac{\left(2a+(n-1)d\right)n}{2}}$$

$$d + 2d + 3d + 4d + 5d + 6d + 7d + 8d + 9d = 45d$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 2 + \frac{7}{3} + \frac{8}{3} + 3 = 15; \; d = 1/3$$

Длинное произведение и короткое обозначение:

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot$$
$$\cdot21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot25\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\cdot30\cdot31\cdot32\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36\cdot37\cdot$$
$$\cdot38\cdot39\cdot40\cdot41\cdot42\cdot43\cdot44\cdot45\cdot46\cdot47\cdot48\cdot49\cdot50\cdot51\cdot52\cdot53\cdot54\cdot$$
$$\cdot55\cdot56\cdot57\cdot58\cdot59\cdot60\cdot61\cdot62\cdot63\cdot64\cdot65\cdot66\cdot67\cdot68\cdot69\cdot70\cdot71\cdot$$
$$\cdot72\cdot73\cdot74\cdot75\cdot76\cdot77\cdot78\cdot79\cdot80\cdot81\cdot82\cdot83\cdot84\cdot85\cdot86\cdot87\cdot88\cdot$$
$$\cdot89\cdot90\cdot91\cdot92\cdot93\cdot94\cdot95\cdot96\cdot97\cdot98\cdot99\cdot100 = \prod_{k=1}^{100} k \equiv 100! \approx 10^{157}$$

Произведение

$$a_1 a_2 \ldots a_n \equiv \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Факториал 0!=:1, 1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120, 6!=720,...

$$\boxed{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n=\prod_{k=1}^{n}k\equiv n!}$$

Сочетания (подмножества) из n элементов по k

$$\boxed{C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}}$$

Размещения (упорядоченные подмножества) из n элементов по k

$$\boxed{A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$$

Перестановки из n элементов

$$P_n\equiv A_n^n=n!.$$

Частные случаи

$$C_n^0=1,\, C_n^1=n,\, C_n^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\, C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Сочетания — пример

$$\{r,g,b\}\Rightarrow\{\{r,g\},\{r,b\},\{g,b\}\};\, C_3^2=3.$$

Размещения — пример

$$\{r,g,b\}\Rightarrow\{(r,g),(r,b),(g,b),(g,r),(b,r),(b,g)\};\, A_3^2=6.$$

Полезные формулы

$$C_n^{n-k}=C_n^k,$$

$$C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k.$$

треугольник Паскаля $\quad C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
C_1^k & \longrightarrow & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
C_2^k & \longrightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
C_3^k & \longrightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
C_4^k & \longrightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
C_5^k & \to & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

_ _ _ _ _ _ _ _

Бином Ньютона (n натуральные числа)

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}a^{n-r}b^r=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r}$$

Пример1

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

Пример2

$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4.$$

Формы комплексных чисел

$$z:=a+ib=(a,b)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi};\, a,b,\rho,\varphi\in\mathrm{R}.$$

Ообозначения

$$i:=(0,1),\quad a:=(a,0),\quad \bar{z}:=a-ib,\quad \varphi:=\arg z,\quad \rho:=|z|;a=\operatorname{Re}z,\ b=\operatorname{Im}z.$$

Сложение

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d).$$

Умножение

$$\boxed{ii=i^2=-1}\qquad a(c+id)=ac+iad;\, i(c+id)=-d+ic,$$

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(cb+ad).$$

Полезно знать

$$z\bar{z}=|z|^2.$$

Деление

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}.$$

Формула Муавра

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi).}$$

n корней из z

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\arg z}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k=\overline{0,n-1}.$$

Пример

$$\left(\sqrt{1-i}\right)_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right),$$

$$\left(\sqrt{1-i}\right)_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

Теорема Безу Пусть $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$ и $P(a)=0$. Тогда $P(z)=(z-a)\tilde{P}(z)$.

Кратный корень $z=b$ (кратность равна m)

$$P(z)=(z-b)^m\tilde{P}(z),\ \tilde{P}(b)\neq 0.$$

Основная теорема алгебры. Любой многочлен с комплексными коэффициентами степени m имеет ровно m комплексных корней (с учетом их кратности).

Разложение многочлена с комплексными коэффициентами

$$P(z)=a_n(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n).$$

Разложение многочлена с действительными коэффициентами

$$P(x)=a_n\prod_{k=1}^{N}(x-\alpha_k)^{n_k}\prod_{l=1}^{M}\left(x^2+\beta_l x+\gamma_l\right)^{m_l},\ \alpha_k,\beta_l,\gamma_l\in\mathrm{R}$$

В математической логике часто используются два квантора: $\exists$ (квантор существования), $\forall$ (квантор всеобщности). Вместо фразы «для всех» мы пишем символ $\forall$, а вместо фразы «существует такое» мы пишем символ $\exists$.

Как строить отрицание-1 Высказывание $\overline{\forall x\exists y A(x,y)}$ равносильно $\exists x\forall y\overline{A(x,y)}$.

Как строить отрицание-2 Высказывание $\overline{\exists x\forall y A(x,y)}$ равносильно $\forall x\exists y\overline{A(x,y)}$.

Как строить отрицание-3 Высказывание $\overline{\exists x\exists y A(x,y)}$ равносильно $\forall x\forall y\overline{A(x,y)}$.

Как строить отрицание-4 Высказывание $\overline{\forall x\forall y A(x,y)}$ равносильно $\exists x\exists y\overline{A(x,y)}$.

Как строить отрицание многоместного предиката $\overline{\exists x\forall y\exists z\forall u\forall v A(x,y,z,u,v)}$ равносильно $\forall x\exists y\forall z\exists u\exists v\overline{A(x,y,z,u,v)}$.

Важные числовые множества: интервал (a,b), отрезок $[a,b]$. Числовое множество называют *ограниченным*, если все числа этого множества принадлежат некоторому отрезку.

Любое ограниченное множество X имеет ***точную верхнюю грань*** (ее обозначают $\sup X$) и ***точную нижнюю грань*** (ее обозначают $\inf X$).

Точная верхняя грань полностью характеризуется двумя условиями:

$$\boxed{1)\forall x\in X\ \ (x\le\sup X)\ ;\ 2)\ \forall\varepsilon>0\exists x_\varepsilon\in X\ \ (x_\varepsilon>\sup X-\varepsilon).}$$

Аналогично задается нижняя грань

$$\boxed{1)\forall x\in X\ \ (x\ge\inf X)\ ;\ 2)\ \forall\varepsilon>0\exists x_\varepsilon\in X\ \ (x_\varepsilon<\inf X+\varepsilon).}$$

Контрольные вопросы по модулю № 1:

- ✓ $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2=?$

- ✓ $2+22+222+2222+22222+222222+2222222=?$
- ✓ $1+2+4+8+16++32+64+128+256+512=?$
- ✓ Расписать и найти чему равна сумма $\sum_{k=0}^{10} 4k+1$
- ✓ Записать в виде суммы $1+6+11+16+21+26=\sum_{k=1}^{?}?$
- ✓ Раскрыть скобки в $(2-x)^5$
- ✓ Найти коэффициент при x^3 в разложении $(1-x+x^2)^3$
- ✓ Упростить сумму $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$
- ✓ Найти все подмножества множества $\{a,b,c\}$. Их восемь!
- ✓ Определение1. Контрольная работа легкая, если каждую задачу решил хотя бы один студент. Определение2. Контрольная работа легкая, если хотя бы один студент решил каждую задачу. Эти определения равносильны? Запишите эти определения с помощью кванторов.

Модуль 2. Последовательности

Для последовательностей используются обозначения:

1) $f:\mathrm{N}\to\mathrm{R},\ f(n):=x_n$
2) $x_n \quad {}_{n\in\mathrm{N}}$
3) $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$

Определение 1. Последовательность α_n будем называть ***бесконечно малой***, если для каждого $\varepsilon>0$ только конечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n|\ldots\varepsilon$. Это определение с кванторами:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall n>\delta\ |\alpha_n|<\varepsilon\ .$$

Определение 2. Последовательность β_n будем называть ***бесконечно большой***, если для каждого $\varepsilon>0$ только конечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|\beta_n|,\ \varepsilon$. Это же определение с кванторами:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall n>\delta\ |\beta_n|>\varepsilon\ .$$

Определение 3. Точка α называется ***предельной точкой*** последовательности, если для каждого $\varepsilon>0$ бесконечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n-\alpha|<\varepsilon$. α — предельная точка и кванторы. Наше определение с кванторами:

$$\forall\varepsilon>0\forall\delta>0\exists n>\delta\ |x_n-\alpha|<\varepsilon\ .$$

Определение 4. Последовательность (x_n) называется ***сходящейся***, если найдется число a такое, что $(x_n - a) = (\alpha_n)$ является бесконечно малой. При этом будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a, n \to \infty$, и говорить, что последовательность имеет ***предел*** равный a . Если найти такого числа нельзя, то говорят, что последовательность ***расходится***. $x_n \to \alpha$. Это определение (сходящейся последовательности) с кванторами:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta \ |x_n - \alpha| < \varepsilon \ .}$$

$x_n \to \infty$ и кванторы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta \ |x_n| > \varepsilon \ .$$

$x_n \to +\infty$ и кванторы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta \ x_n > \varepsilon \ .$$

$x_n \to -\infty$ и кванторы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n > \delta \ x_n < -\varepsilon \ .$$

Примеры задания последовательностей.

постоянная

$$x_n = 3; \quad 3,3,3,\ldots \ ,$$

натуральная

$$x_n = n; \ 1,2,3,\ldots,n\ldots,$$

плюс минус

$$x_n = (-1)^{n+1}; \quad 1,-1,1,-1,\ldots \ ,$$

гармоническая

$$x_n = \frac{1}{n}; \ \left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right),$$

рекуррентная последовательность Фибоначчи

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, x_1 = 1, x_2 = 1; \quad 1,1,2,3,5,8,13\ldots \ ,$$

рекуррентная – длинный корень

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, x_1 = 2; \quad \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}\ldots \ ,$$

рекуррентная для поиска корня из числа a

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), x_1 = a > 0; \ \left(\sqrt{2} \approx x_2 = \frac{3}{2}\right),$$

бесконечно малые = сходящиеся к нулю

$$x_n = \frac{1}{n}; \ x_n = \frac{(-1)^n}{n}; \ x_n = \frac{1}{q^n}, q > 1,$$

сходящиеся к единице

$$x_n = \frac{n-1}{n}; \ x_n = \sqrt[n]{n}; \ x_n = \sqrt[n]{a}, a > 0,$$

простая1

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4,\left(\frac{1}{5}\right)^9,\left(\frac{1}{5}\right)^{16},\left(\frac{1}{5}\right)^{100},\ldots\to 0\left(\lim_{n\to\infty} q^n=0,|q|<1\right),$$

простая2

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{200}},\ldots\to 0\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^q}=0,\ q>0\right),$$

важная1

$$\frac{5^{100}}{1{,}1^5},\frac{10^{100}}{1{,}1^{10}},\frac{100^{100}}{1{,}1^{100}},\frac{1000^{100}}{1{,}1^{1000}},\ldots\to 0\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0,\ a>1\right),$$

важная2

$$\frac{100^5}{5!},\frac{100^{10}}{10!},\frac{100^{100}}{100!},\frac{100^{1000}}{1000!},\ldots\to 0\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\right),$$

важная3

$$\sqrt[5]{5},\sqrt[10]{10},\sqrt[100]{100},\sqrt[1000]{1000},\ldots\to 1\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0\right),$$

важная4

$$\sqrt[5]{5},\sqrt[10]{5},\sqrt[100]{5},\sqrt[1000]{5},\ldots\to 1\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>1\ ,$$

замечательная1

$$\left(\left(\frac{2}{1}\right)^1,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4,\left(\frac{6}{5}\right)^5,\ldots\right)\to e,$$

замечательная2

$$\left(\frac{1}{0!},\ \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!},\ \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!},\ \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\ldots\right)\to e,$$

расходящиеся ограниченные

$$x_n=(-1)^n;\ \ x_n=\sin n,$$

расходящиеся бесконечно большие

$$x_n=n;\ \ x_n=n!;\ \ x_n=q^n,q>1,$$

расходящиеся неограниченные

$$x_n=(-1)^n n;\ \ x_n=q^n,q<-1.$$

Полезно знать, что значительно больше

$$\boxed{\lg n=\ \ n^p=\ \ a^n=\ \ n!,\ n\to+\infty.}$$

Теорема сохранение нестрогого неравенства

$$x_n\to a,y_n\to b;x_n\le y_n\ \ \Rightarrow a\le b$$

$$x_n\to a,y_n\to b;x_n< y_n\ \ \Rightarrow a\le b$$

Теорема о сжатой переменной

$$x_n \to a, y_n \to a; x_n \le u_n \le y_n \ \Rightarrow u_n \to a$$
$$x_n \to a, y_n \to a; x_n < u_n < y_n \ \Rightarrow u_n \to a$$

Теорема о монотонной и ограниченной последовательности. Если последовательность возрастает (начиная с некоторого номера) и ограничена сверху, то она сходится. Если последовательность убывает (начиная с некоторого номера) и ограничена снизу, то она сходится.

Подпоследовательности:

1) подпоследовательность (номера кратные трем)

$$y_1 = x_3, y_2 = x_6, y_3 = x_9, y_4 = x_{12}, y_5 = x_{15}, \ldots$$

2) подпоследовательность (простые числа)

$$y_1 = x_2, y_2 = x_3, y_3 = x_5, y_4 = x_7, y_5 = x_{11}, \ldots$$

3) НЕ подпоследовательность

$$y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_5, y_4 = x_2, y_5 = x_{11}, \ldots$$

Задачи с решениями для модуля № 2

Задача 1. Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Решение

◄ Будем пользоваться известным фактом: когда последовательность сходится к пределу, то к тому же пределу сходится и любая ее подпоследовательность. Предположим, что эта последовательность сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sin 2n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = a$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+2) - \sin n) = 0.$$

Из формулы $\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1 \cos(n+1)$ следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos n = 0$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n = \lim_{n\to\infty} 2\sin n \cos n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin n = \lim_{n\to\infty} \cos n = 0.$$

Но это невозможно, ибо $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ ►

Задача 2. Пусть $x_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Сходится ли эта последовательность?

Решение

◄ Ясно,что

$$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}, x_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}.$$

Докажем по индукции равенство $x_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$. Достаточно проверить шаг индукции, что $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}$. Но

$$x_{n+1} = x_n\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = x_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Теперь предел найти легко

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$ ►

Задача 3. Исследуем последовательность
$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)...\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

Решение

◄ Последовательность $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)...\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ сходится по теореме о монотонной и ограниченной последовательность. Так как $x_{n+1} = x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < x_n$, то данная последовательность является убывающей. Очевидно, что $x_n > 0$.

Если вы думаете, что она сходится к нулю, то ошибаетесь. Чему равен предел? Если сравнить эту последовательность с последовательностью из задачи 2, то легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \frac{1}{5}$.►

Задача 4. Доказать, что последовательность
$x_{n+1} = x_n(2 - x_n), 0 < x_1 < 1$, сходится и найти предел.

Решение

◀ Проверим условия теоремы о <u>монотонной</u> и <u>ограниченной</u> последовательности. Так как

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n) = 1 - (1 - x_n)^2, \tag{1}$$

то $x_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Значит, эта последовательность ограничена сверху. Кроме того,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 - x_n.$$

Поэтому $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Итак, наша последовательность возрастает. По теореме о монотонной и ограниченной последовательности эта последовательность сходится. Теперь легко найти предел, если перейти к пределу в равенстве (1). Тогда $a = a(2 - a) \Rightarrow a = 1, 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Почему не нуль? ▶

Попробуйте рассмотреть пример $x_{n+1} = x_n(3 - x_n), x_1 = 0.5, x_1 = 3,5$.

Задача 5. Найти предел последовательности $x_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

Решение

◀ Используя формулы приведения $\cos A = (-1)^n \cos(A + \pi n)$, получим

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = (-1)^n \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi n\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) = 0. \blacktriangleright$$

Попробуйте изучить $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$. Ответ: предел не существует!

Ниже приводится список контрольных вопросов и задач по модулю № 2.

Контрольные вопросы по модулю № 2

- Дайте определение сходящейся последовательности.
- Может ли сходится неограниченная последовательность.
- Найти формулу общего члена последовательности
  $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 - x_n}, x_1 = \dfrac{1}{2}.$
- Дайте определение частичного предела последовательности.
- Что такое верхний предел последовательности.
- Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.
- Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.
- Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^{2n}+1}$. Предел зависит от параметра a.!
- Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.
- Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.
- Попробуйте исследовать $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Модуль 3. Предел функции

Определение 1. Пусть A — числовое множество и a является точкой на числовой прямой. Точка a называется ***предельной для множества*** A, если найдется последовательность (x_n) такая, что $x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n \in A$.

Определение 2. Рассмотрим два символа $+\infty$ и $-\infty$ (бесконечно удаленные точки). Символ $+\infty$ ($-\infty$) называется предельной точкой множества A, если найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \to +\infty (x_n \to -\infty),\ x_n \in A$.

Определение 3. Множество $U_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\}$ называется **δ-окрестностью** точки a (***окрестность*** точки a). Множество $U_\delta(a) \cap A = U_\delta^A(a)$ называется δ-окрестностью точки a в множестве A (окрестность точки a в множестве A).

Определение 4. Множество $\dot{U}_\delta(a) = \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ называется ***проколотой*** δ-***окрестностью*** точки a. Множество $\dot{U}_\delta(a) \cap A = \dot{U}_\delta^A(a)$ называется ***проколотой*** δ-***окрестностью*** точки a ***в множестве*** A (*проколотая окрестность* точки a в множестве A).

Определение 5. Для бесконечно удаленных точек определим аналогичные окрестности:

$$\dot U_\delta(+\infty)=\{x : x>\delta\};\dot U_\delta(-\infty)=\{x : x<-\delta\};\dot U_\delta(\pm\infty)\bigcap A=\dot U_\delta^A(\pm\infty).$$

Определение 6. Пусть a — предельная точка множества A (возможны также $+\infty$ и $-\infty$). Число α называется ***пределом (по Коши) функции*** f ***в точке а***, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x из окрестности $\dot U_\delta^A(a)$ выполняется неравенство $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$ (в этом случае говорят также, что функция f имеет предел α *в точке* а). Переводя это определение на язык математической логики, получим утверждение:

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in\dot U_\delta^A(a)(|f(x)-\alpha|<\varepsilon).$$

Обозначения: а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$; б) $f(x)\to\alpha$, при $x\to a$.

Определение 7. Множество $\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}\bigcup\{-\infty\}$ назовем ***расширенной числовой прямой***. Пусть $a\in\hat{\mathbb{R}}$ — предельная точка множества A. Будем говорить, что $\alpha\in\hat{\mathbb{R}}$ является ***пределом функции f в точке a (по Гейне)***, если для любой последовательности $x_n\to a$, $x_n\in A$, $x_n\neq a$, предел последовательности $(f(x_n))$ равен α.

Замечание. Определение по Коши и определение по Гейне эквивалентны, то есть определяют одно и то же понятие.

Определение 8. Предположим, что $(a-\gamma;a)\subset A$ для некоторого числа $\gamma>0$. Тогда $\alpha\in\hat{\mathbb{R}}$ называется ***пределом слева*** функции f в точке a, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a-\delta;a)(|f(x)-\alpha|<\varepsilon).$$

Обозначения: а) $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\alpha$; б) $f(a-)=\alpha$.

Определение 9. Пусть $(a,a+\gamma)\subset A$ для некоторого числа $\gamma>0$. Тогда $\alpha\in\hat{\mathbb{R}}$ называется ***пределом справа*** функции f в точке a, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in(a;a+\delta)(|f(x)-\alpha|<\varepsilon).$$

Обозначения: а) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\alpha$; б) $f(a+)=\alpha$. Пределы из определений 8 и 9 называют ***односторонними*** пределами.

Самые важные пределы

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}\Leftrightarrow\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\approx2{,}71828}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}\Leftrightarrow\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}\Leftrightarrow\boxed{\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\lambda}-1}{x}=\lambda \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^q}=0$$

Определение 10. Пусть отношение $f(x)/g(x)$ стремится к нулю при $x\to a$, тогда будем писать $f(x)=o(g(x)), x\to a.$

Определение 11. Если отношение $f(x)/g(x)$ ограничено при $x\to a$, то будем писать $f(x)=O(g(x)), x\to a.$

Определение 12. Пусть отношение $f(x)/g(x)$ стремится к единице при $x\to a$, тогда будем писать $f(x)\sim g(x), x\to a.$ Равносильная формула $f(x)=g(x)+o(g(x)), x\to a.$ называется ***асимптотическим разложением***.

Основные асимптотические разложения при $x\to 0$

$\sin x=x+o(x)$	$\cos x=1-x^2/2+o(x^2)$	$\operatorname{tg} x=x+o(x)$	$\arcsin x=x+o(x)$
$(1+x)^{\lambda}=1+\lambda x+o(x)$	$\ln(1+x)=x+o(x)$	$\operatorname{arctg} x=x+o(x)$	$a^x=1+x\ln a+o(x)$

Полезные свойства

$$\begin{array}{l} a)\ o(cf(x))=o(f(x)),\\ b)\ o(f(x))+o(f(x))=o(f(x)),\\ c)\ o(f(x))O(g(x))=o(g(x)f(x)),\\ d)\ o(o(f(x)))=o(f(x)). \end{array}$$

Примеры 1) $\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$ при $x\to+\infty$ 2) $\sqrt{x+\sqrt{x}}\sim\sqrt[4]{x}$ при $x\to 0+$

3) $3x^2+2x^3=O(x^2)$ при $x\to 0$ 4) $3x^2+2x^3=O(x^3)$ при $x\to\infty$

5) $x^{100}=o(2^x)$ при $x\to+\infty$ 6) $\ln x=o(\sqrt{x})$ при $x\to+\infty$

Рассмотрим несколько методов вычисления пределов.

Метод разложения.

Если требуется найти предел отношения двух многочленов, то полезно разложить многочлены на множители.

Пример. Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

◄ Выполним преобразования:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{3}{x^2+x+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1.$$ ►

Метод избавления от иррациональности в числителе или знаменателе.

Пример.

$$\& \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{5x+4}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3x+1}\quad \sqrt{3+x}+\sqrt{3x+1}\quad \sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+4}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{5x+4}\quad \sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+4}\quad \sqrt{3+x}+\sqrt{3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3+x\ -\ 3x+1}{4x+5\ -\ 5x+4}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+4}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{1-x}\cdot\left(\frac{3+3}{2+2}\right)=3.\%$$

Метод введения новой переменной.

В следующем примере удобно ввести переменную

$$t=\sqrt[5]{29+x},\, x=t^5-29,$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[5]{29+x}-2}{x-3}$

$$◀\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{29+x}-2}{x-3}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32}=\frac{1}{16}\lim_{t\to 2}\frac{1}{1+\dfrac{t}{2}+\left(\dfrac{t}{2}\right)^2+\left(\dfrac{t}{2}\right)^3+\left(\dfrac{t}{2}\right)^4}=\frac{1}{80}.\ ▶$$

Метод вычисления тригонометрических пределов.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}5x}$

◀ Обозначим

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg}5x}=L.$$

Сначала используем новую переменную $t=x-\pi,\ x=t+\pi$. Тогда

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\ 7\ t+\pi}{\operatorname{tg}\ 5\ t+\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 7t}{\operatorname{tg}5t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin 7t\ \big/7t}{\sin 5t\ \big/5t}\cos 5t\cdot\frac{7}{5}=-\frac{7}{5}.\ ▶$$

Метод вычисления степенно-показательных пределов.

Воспользуемся следующим общим результатом для предела, когда имеется неопределенность 1^{∞}:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=L,\ \lim_{x\to a}f(x)=1,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty.$$

Тогда

$$L=\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^M,\ M=\lim_{x\to a}g(x)\ \ f(x)-1\ .$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ \operatorname{tg}x\ ^{\operatorname{tg}2x}$.

◄ Пусть $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{M}$. Тогда

$$M = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\,(\operatorname{tg} x - 1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}(\operatorname{tg} x - 1) \right) = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} \right) = -1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. ►

Метод асимптотических равенств.

Выше были даны основные асимптотические разложения, которые могут быть использованы при нахождении пределов.

Пример. Вычислить пределы: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 7x}{\ln\cos 3x}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^4 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$

$$\& \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 7x}{\ln\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{49x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{49x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{49x^2}{9x^2} = \frac{49}{9}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^4 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x + \ln(1 - x^{-1} + x^{-4})}{10\ln x + \ln(1 + x^{-9} + x^{-10})} = \frac{2}{5} \quad ►$$

Непрерывность функции.

Определение 13. Пусть $a \in A$. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется ***непрерывной в точке*** a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Замечание. Рассмотрим отрезок $A = [\alpha, \beta]$. Если точка $a = \alpha$, то определение 13 равносильно наличию равенства

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) \equiv f(\alpha+) = f(\alpha).$$

В этом случае функцию называют *непрерывной справа* в точке α. Аналогично, непрерывность в точке $a = \beta$ называют *непрерывностью слева* в этой точке $f(\beta-) = f(\beta)$.

Определение 14. Функция f называется ***непрерывной на множестве*** A, когда она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ непрерывна во всех точках, кроме нуля.

Определение 15. Если в точке a не выполняются условия определения 13, то будем говорить, что a есть ***точка разрыва*** функции f.

Определение 16. Пусть функция определена в проколотой окрестности точки разрыва a и существуют конечные пределы $f(a+), f(a-)$. Точка a называется ***точкой разрыва первого рода*** функции f, если $f(a+) \neq f(a-)$. Когда $f(a+) = f(a-)$, точку a называют точкой ***устранимого разрыва***. Если один из пределов равен бесконечности или не существует, то a – ***точка разрыва второго рода***.

Укажем на некоторые полезные свойства непрерывных функций.

Свойство 1 (*арифметическое свойство*). Арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям. При делении $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ надо добавить (в точке непрерывности x_0) одно естественное ограничение $g(x_0) \neq 0$.

Свойство 2 (*непрерывность композиции*). Пусть X, Y, Z промежутки. Рассмотрим две функции $f: X \to Y, g: Y \to Z$. Допустим, что функция $f: X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, а функция $g: Y \to Z$ непрерывна в точке $b = f(a) \in Y$. Тогда функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Свойство 3 (*сохранение знака непрерывной функции*). Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то найдется окрестность $U_\delta(x_0)$, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ справедливо равенство $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$.

Свойство 4 (*теорема Вейерштрасса*). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдутся точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Свойство 5 (*теорема о промежуточном значении*). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда функция f принимает любое значение между $f(a)$ и $f(b)$.

Замечание. Особенно важны два последних свойства. Отметим, что обе теоремы справедливы для **непрерывных** функций на **отрезке**.

Кроме локального понятия непрерывности, есть и глобальное — равномерная непрерывность.

Определение 17. Функция $f: A \to \mathbb{R}$ называется ***равномерно непрерывной на множестве*** A, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in A \ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right).$$

Замечание. Пусть функция f является равномерно непрерывной на множестве A. Тогда функция f будет непрерывной в любой точке множества A.

Замечание. Если $A = [a;b]$, то равномерная непрерывность функции f равносильна непрерывности на множестве A (теорема Гейне — Кантора).

Поэтому элементарные функции, заданные на отрезке будут на нем равномерно непрерывны.

Задачи с решениями для модуля № 3

Задача 1. Рассмотрим уравнение $\varepsilon x^2 + bx + c = 0$. Пусть $\varepsilon \to 0$. Как ведут себя корни уравнения?

Решение

◀ Это задача с малым параметром ε. Запишем решение нашего квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon c}}{2\varepsilon} = \frac{-2c}{\left(b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon c}\right)}, x_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon c}}{2\varepsilon}.$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(b + \sqrt{b^2 - 4\varepsilon c}\right) = 2b,$$

то при $\varepsilon \to 0$

$$x_1 \to -\frac{c}{b},$$

а

$$x_2 \to -\infty. \blacktriangleright$$

Задача 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ и $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$, где $n, m \in \mathbb{N}$.

Решение

◀ Вспомним формулу суммы геометрической прогрессии

$$\boxed{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}}$$

Теперь наша задача решается легко

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) = n.$$

Как следствие, получим предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m}. \blacktriangleright$$

Задача 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$

Решение

◀ Сделаем замену $\sqrt[n]{x+1}=t, t^n-1=x$. Тогда надо найти предел

$$\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}.$$

Подобный предел мы уже находили (смотри Задачу 2). Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}=1/n. \blacktriangleright$$

Задача 4.

$-\infty$

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{4x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+e^x x^{-2}\right)}{4\ln|x|+\ln\left(1+e^{4x}x^{-4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+(\ln|x|)^{-1}\ln\left(1+e^x x^{-2}\right)}{4+(\ln|x|)^{-1}\ln\left(1+e^{4x}x^{-4}\right)}=\frac{1}{2}\blacktriangleright$$

Сравните со следующей задачей. Почувствуйте разницу!

$+\infty$

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{4x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x+\ln\left(1+x^2e^{-x}\right)}{\ln e^{4x}+\ln\left(1+x^4e^{-4x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+(x)^{-1}\ln\left(1+e^{-x}x^2\right)}{4+(x)^{-1}\ln\left(1+e^{-4x}x^4\right)}=\frac{1}{4}\blacktriangleright.$$

Задача 5. Найти числа a и b, для которых функция $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + ax + b$ будет бесконечно малой при $x \to -\infty$.

Решение

◄ Воспользуемся асимптотическим равенством

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t),\ t \to 0.$$

Тогда

$$\sqrt{x^2+x+1} = |x|\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}} = -x\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \to -\infty,$$

где $t = x^{-1} + x^{-2} \to 0$. Значит,

$$\sqrt{x^2+x+1} = -x - \frac{1}{2} + o(1), x \to -\infty.$$

Так как $o(1)$ – бесконечно малая, то $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы по модулю № 3:

1. Запишите, с помощью кванторов, определение $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 3$.
2. Запишите, с помощью кванторов, что $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ не существует.
3. Приведите пример функции, у которой $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ не существует, а $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ существует.
4. Приведите пример бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.
5. Приведите пример бесконечно большой функции при $x \to -\infty$.
6. Привести пример функции, которая имеет три точки разрыва первого рода.
7. Дайте определение гиперболических функций $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$.
8. Какие асимптотические равенства верны:

   8.1. $3x^2 = o(x),\ x \to 0$,

   8.2. $\frac{1}{2}x = o(x),\ x \to 0$,

   8.3. $1 - \cos x = o(x),\ x \to 0$,

   8.4. $\ln(1+x) = o(x),\ x \to 0$,

   8.5. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x),\ x \to 0$,

   8.6. $o(x) + o(x) + o(x) = o(x),\ x \to 0$.

9. Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

10. Найдите предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

Модуль 4. Производная

Рассмотрим функцию $f:X\to\mathbf{R}$, X — промежуток. Обозначения:

$$y=f(x); x-x_0=\Delta x=h; f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)(h)\equiv\Delta f.$$

Определение 1. Если существует предел

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0),}$$

то он называется *производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0. В научной и учебной литературе для производной используются разные обозначения: $f'(x_0)=\dfrac{df}{dx}(x_0)=Df(x_0)=y'(x_0)$.

Определение 2. Если существует

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_+'(x_0),$$

то он называется *правой производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0, а предел

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f_-'(x_0)$$

называется *левой производной* функции $y=f(x)$ в точке x_0. Обе производные называют *односторонними* производными.

Замечание. Производная в точке существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают обе односторонние производные.

Пример 1. Функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке $x_0=0$, так как $f_+'(0)=1$, а $f_-'(0)=-1$.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, когда справедливо представление

$$\Delta f=A\Delta x+o(\Delta x), \Delta x\to 0,$$

для некоторой постоянной $A\in\mathbf{R}$.

Замечание. Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$. При этом $A=f'(x_0)$.

Следствие 1. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке, так как из определения 3 следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Пример функции $f\ x=|x|$ показывает, что обратное утверждение неверно. Эта функция непрерывна, но не дифференцируема в точке $x=0$.

Касательная. Односторонние касательные

Рассмотрим дифференцируемую в точке $x_0 \in X$ функцию $f : X \to \mathbf{R}$.

Определение 4. Прямая линия, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называется *секущей* к графику функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке x_0 (в зависимости от выбора переменной x получим бесконечное множество секущих). Если x стремится к x_0, то получим прямую линию, заданную уравнением

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

Такая прямая называется *касательной* к графику функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке x_0.

Определение 5. Прямые линии, которые задаются уравнениями

$$y = f_+'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); y = f_-'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

называются, соответственно, *правой и левой касательными* к графику функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке x_0.

Замечание. Если $f'(x_0) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной* касательной в точке x_0.

Определение 6. Рассмотрим две линии, которые являются графиками дифференцируемых функций. Пусть эти линии пересекаются в точке $x = x_0$. *Углом* между такими линиями в точке пересечения называется угол между соответствующими касательными в точке пересечения.

Дифференциал

Определение 7. Пусть функция $f : X \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке x_0, тогда линейная функция $h \mapsto Ah\,(A = f'(x_0))$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0. Дифференциал обычно обозначают символом $df(x_0)$ или dy, если $y = f(x)$. При этом

$$\boxed{df(x_0)(h) = f'(x_0)h.}$$

Замечание. Теперь условие дифференцируемости можно записать в следующем виде:

$$\Delta f(x_0)(h) = df(x_0)(h) + o(h), h \to 0.$$

Замечание. Поскольку для функции $y = x$ в любой точке дифференциал и сама функция совпадают, то принято обозначать ее дифференциал символом dx. Поэтому дифференциал функции f записывают так:

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx.}$$

Замечание. Пусть $y = S(t)$ — путь, который проходит материальная точка за время t. Тогда

$$\frac{S\ \ t+\Delta t\ \ -S\ \ t}{\Delta t}\ —$$

средняя скорость за промежуток времени Δt, а производная $S'(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t.

ВАЖНЕЙШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ!!

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

Арифметические операции над производными. Свойства дифференциала

Запишем условие дифференцируемости в несколько иной форме, чем в определении 3.

Замечание. Введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Тогда условие дифференцируемости функции f в точке x_0 равносильно непрерывности функции $\tilde{f}_{x_0}(x)$ в этой же точке. При этом

$$\tilde{f}_{x_0}(x_0) = f'(x_0).$$

Допуская некоторую вольность в обозначениях (она часто встречается в учебниках и задачниках), мы часто будем писать $f'(x) \equiv (f(x))'$.

Теорема 1. Если функции f, g дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке дифференцируемы сумма, разность, произведение и частное этих функций. При этом справедливы формулы:

$$f \pm g\ '(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0);$$

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0);$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)};\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)};\ \ g(x)\neq 0.$$

Следствие 1. Из теоремы 1 следуют аналогичные свойства для дифференциалов:

$$d(f\pm g)=df\pm dg; d(fg)=fdg+gdf;$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2};\ \ g(x)\neq 0.$$

Следствие 2. По индукции легко получить формулу

$$(f_1f_2\dots f_n)'=f'_1f_2\dots f_n+f_1f'_2\dots f_n+\dots+f_1f_2\dots f'_n.$$

Здесь в каждом слагаемом правой части последовательно дифференцируется только один множитель.

Производная композиции функций. Производная обратной функции

Теорема 2 (производная композиции функций). Пусть выполняются условия: а) функция $x=f(t)$ дифференцируема в точке t_0 и $f'(t_0)=A$; б) функция $y=g(x)$ дифференцируема в точке $x_0=f(t_0)$ и $g'(x_0)=B$; в) определена функция $y=g(f(t))$ в окрестности точки t_0. Тогда функция $H(t)=(g\circ f)(t)=g(f(t))$ дифференцируема в точке t_0 и справедлива формула

$$H'(t_0)=(g\circ f)'(t_0)=AB\equiv g'(f(t_0))f'(t_0).$$

Теорема 3 (производная обратной функции). Пусть выполняются следующие условия: а) функция $y=g(x)$ дифференцируема в точке x_0; б) в окрестности точки x_0 существует непрерывная обратная функция $x=g^{-1}(y)$; в) $g'(x_0)\neq 0$. Тогда функция g^{-1} дифференцируема в точке y_0 и справедлива формула

$$\left(g^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{g'(x_0)}=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(y_0)\right)}.$$

Уже знакомую нам производную $f'(x)$ называют также производной первого порядка (первой производной) и обозначают символом $f^{(1)}(x)\equiv f'(x)$. Если производная первого порядка является дифференцируемой, то ее производную $(f')'(x)=f''(x)\equiv f^{(2)}(x)$ будем называть производной второго порядка (второй производной). По индукции определяются производные третьего и других порядков, то есть

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x),\ n\in N.$$

Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующее обозначение: $f^{(0)}(x)\equiv f(x)$.

Важные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа

Везде далее в этом разделе все функции $f, g, \ldots$ заданы на отрезке $[a,b]$ и непрерывны на этом отрезке.

Теорема 4 (*Ферма*). Пусть $x_0 \in (a,b)$ и точка x_0 является точкой экстремума функции $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. Если существует производная функции f в точке x_0, то

$$f'(x_0) = 0.$$

Определение 8. Точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, будем называть *стационарными* точками функции f.

Замечание. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$ надо искать среди точек трех типов: стационарных точек; точек, где функция не дифференцируема; граничных точек a, b.

Если теорема Ферма является локальным результатом (важно как ведет себя функция в некоторой окрестности данной точки), то следующие результаты теорем являются глобальными (результат зависит от поведения функции на всем отрезке).

Теорема 5 (*Ролль*). Пусть функция $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$f'(c) = 0.$$

Теорема 6 (*Коши*). Рассмотрим две функции f, g. Предположим, что обе функции дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x) \neq 0$. Тогда найдется точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема 7 (*Лагранж*). Если функция $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ дифференцируема на интервале (a,b), то $\exists c \in (a,b)$, что справедливо равенство

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b).$$

Эту формулу называют: *формула Лагранжа*, *формула конечных приращений*, *теорема о среднем значении*. В данном разделе это самая важная формула.

Следствие 3. Формулу Лагранжа можно записывать в следующем виде:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h), \theta \in (0,1).$$

Следствие 4. Если производная $f'(x) \equiv 0$ на некотором промежутке, то функция f является постоянной.

Теорема 8 (*правило Лопиталя* $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f:(a,b) \to \mathbf{R}$, $g:(a,b) \to \mathbf{R}$ дифференцируемы в правой полуокрестности точки a и там же выполняются условия:

$$1) \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0; \; 2) \; g'(x) \neq 0; \; 3) \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Замечание. Понятно, что с соответствующими изменениями в условиях, теорема справедлива и для базы $x\to b-0$. Для случая базы $x\to\infty$ аналогичная теорема также верна. Достаточно сделать замену $x=1/t$.

Теорема 9 (*правило Лопиталя* $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $g:(a,b)\to\mathbf{R}$ дифференцируемы в правой полуокрестности точки a и там же выполняются условия:

$$1)\ \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=+\infty;\ 2)\, g'(x)\neq 0;\ 3)\ \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Таблица основных производных (знать наизусть!)

$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(e^x)'=e^x$	$(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$
$(x^a)'=ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

Дифференцирование степенно-показательной функции

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)'=\left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)'=f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

Вектор-функции

Обозначения для вектор-функции

$$\vec r(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t)),\ t\in T,\ \vec r_0=(x_1,x_2,x_3).$$

Для предела вектор-функции справедливо утверждение:

$$\lim_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec r_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{t\to t_0}x_1(t)=x_1,\\ \lim\limits_{t\to t_0}x_2(t)=x_2,\\ \lim\limits_{t\to t_0}x_3(t)=x_3.\end{cases}$$

Производная вектор-функции определяется так

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)}{\Delta t}=\vec r'(t)=\ \ x_1'(t),x_2'(t),x_3'(t)\ \ =\ \ \dot x_1,\dot x_2,\dot x_3\ \ .$$

Справедливо свойство

$$\vec r_1(t)\times\vec r_2(t)\ \ =\ \ \vec r_1'(t)\times\vec r_2(t)\ \ +\ \ \vec r_1(t)\times\vec r_2'(t)\ \ .$$

Правило Лейбница для n-й производной произведения

Обозначения:

$$f^{(0)}(t)\equiv f(t),\ f^{(1)}(t)\equiv f'(t),\ f^{(2)}(t)\equiv(f'(t))'=f''(t),\ldots,f^{(n)}=\ \ f^{(n-1)}\ \ ',$$

$$d^0f\equiv f,d^1f\equiv df,d^2f\equiv d(df)=f''(t)dt^2,\ldots,d^nf=f^{(n)}(t)dt^n.$$

Правило Лейбница для произведения двух функций

$$\boxed{fg\ \ ^{n}\ =\sum_{k=0}^{n}C_n^k f\ \ ^{k}\ g\ \ ^{n-k}\ .}$$

Пример

$$x^2\sin 2x\ \ ^{(50)}=1\cdot x^2\ \ -2^{50}\sin 2x\ \ +50\cdot\ \ 2x\ \ \ 2^{49}\cos 2x\ \ +\left(\frac{50\cdot 49}{2}\right)2\ \ 2^{48}\sin 2x\ \ .$$

Производные функций, заданных параметрически

Пусть функция $y=b(s^{-1}(x))\equiv F\ \ x$ задана параметрически

$$\begin{cases}x=s(t),\\ y=b(t).\end{cases}$$

Тогда ее производные вычисляются по следующим формулам:

$$F'(x)=\frac{b'(s^{-1}(x))}{s'(s^{-1}(x))}\Rightarrow F'(s(t))=\frac{b'(t)}{s'(t)}=\frac{dy}{dx},$$

$$F''(x)=\frac{b''(s^{-1}(x))-b'(s^{-1}(x))\dfrac{s''(s^{-1}(x))}{s'(s^{-1}(x))}}{s'(s^{-1}(x))\ \ ^2}\Rightarrow F''(s(t))=\frac{b''(t)s'(t)-b'(t)s''(t)}{s'(t)^3}.$$

Задача 1. Пусть $y = \sin^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)$. Найти y' и dy.

Решение

◀ Сразу заметим, что для вычисления y надо найти $t_1 = \operatorname{tg} x$, затем вычислить $t_2 = t_1^3$, потом найти $t_3 = \sin t_2$ и, наконец, вычислить $y = t_3^2$. М сделали четыре простых (табличных) операции (функции). Осталось найти произведение производных каждой такой функции.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 3t_1^2 \cdot \cos t_2 \cdot 2t_3 =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos\left(\operatorname{tg}^3 x\right) \cdot 2\sin\left(\operatorname{tg}^3 x\right).$$

Найти dy теперь легко

$$dy = \frac{6}{\cos^2 x} \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos\left(\operatorname{tg}^3 x\right) \cdot \sin\left(\operatorname{tg}^3 x\right) dx.$$

Советуем внимательно изучить данный пример. ▶

Задача 2. Пусть $f'(x) > g'(x)$ при $x > 0$ и $f(0) = g(0)$. Показать что $f(x) > g(x)$ при $x > 0$. Выясните, что больше $1 + x + \frac{x^2}{2}$ или e^x?

Решение

◀ Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - g(x)$. Отметим некоторые свойства этой функции. Из условия задачи следует, что $F(0) = 0$ и $F'(x) > 0$. Для этой функции можно применить теорему о среднем (теорему Лагранжа) на отрезке $[0, x]$; $x > 0$. Тогда

$$F(x) = F(x) - F(0) = F'(c)x > 0.$$

Итак, $F(x) = f(x) - g(x) > 0$. Применим этот результат к функциям $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$. Сначала сравним производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Для этого находим $f''(x) = e^x$ и $g''(x) = 1$. Так как $e^x > 1$, то $f'(x) > g'(x)$. Значит, $e^x > 1 + x$, но тогда $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ ▶

Попробуйте рассмотреть случай $x < 0$.

Задача 3. Найти $n-$ю производную функции
$f(x) = \exp\left(-x^{-2}\right),\ x \neq 0;\ \ f(0) = 0$ в точке нуль.

Решение

◀ Если $x \neq 0$, то последовательное вычисление производных дает формулу $f^{(n)}(x) = P_m\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, где P_m – многочлен степени $m = 3n$. Для вычисления последовательных производных в нуле надо вычислить пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left(-x^{-2}\right)}{x^n} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{n}{2}}}{e^t} = \ldots = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\ldots\frac{1}{2}}{\sqrt{t}e^t} = 0.$$

Здесь мы сделали замену $t = \dfrac{1}{x^2} \to +\infty$, а n – любое натуральное число. Тогда все производные в нуле существуют и справедливо равенство $f^{(n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}$. ▶

Задача 4. В уравнении $x^2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$ сделать замену $x = e^t$.

Решение

◀ После замены $x = e^t$ наше уравнение будет иметь вид

$$e^{2t}y''\left(e^t\right) + e^ty'\left(e^t\right) + y\left(e^t\right) = 0.$$

Тождество $y\left(e^t\right) \equiv \tilde{y}(t)$ связывает исходную функцию и новую функцию. Осталось выразить производные старой функции через производные новой. После первого дифференцирования тождества получим

$$\tilde{y}'(t) = y'\left(e^t\right)e^t.$$

После второго дифференцирования находим вторую производную новой функции

$$\tilde{y}''(t) = y''\left(e^t\right)e^{2t} + y'\left(e^t\right)e^t \Rightarrow \tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t) = y''\left(e^t\right)e^{2t}.$$

Теперь легко видеть, что исходное уравнение после замены имеет вид

$$\tilde{y}''(t) + \tilde{y}(t) = 0.$$

Задача 5. Написать уравнения касательных к графику функции $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ в точках пересечения с осью абсцисс.

Решение

◀ Точки пересечения с осью абсцисс $x_k = k,\ k = 1, 2, 3$. Уравнения касательных в этих точках $y = f'(x_k)(x - x_k)$, ибо $f(x_k) = 0$.
Производная

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

В точке $x_1 = 1$ производная $f'(1) = 2$, поэтому уравнение касательной в этой точке $y = 2(x-1)$ или $y = 2x - 2$.
В точке $x_2 = 2$ производная $f'(2) = -1$, поэтому уравнение касательной в этой точке $y = -1(x-2)$ или $y = -x + 2$.
В точке $x_3 = 3$ производная $f'(3) = 2$, поэтому уравнение касательной в этой точке $y = 2(x-3)$ или $y = 2x - 6$. ▶

Контрольные вопросы по модулю № 4:

1. Запишите приращение функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$.
2. Дайте определение производной функции $y = f\ \ x$ в точке $x_0 = 1$.
3. Какой физический смысл имеет производная?
4. Запишите уравнение касательной к графику $y = e^x$ в точке $x_0 = e$.
5. Как вычисляется производная произведения четырех функций?
6. Запишите формулу дифференцирования частного двух функций.
7. Найдите $\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)'$.
8. Что такое дифференциал функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.
9. Найдите $d\ \ \sqrt{1-x^2}$.
10. Вычислите $\sqrt{1-x}\ \ ^{9}$.

Модуль 5. Формула Тейлора и графики функций

Определение 1. Многочленом Тейлора в точке α функции $f\ \ x$ называют

$$\boxed{T_n(x,\alpha) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}\ \ x-\alpha\ \ + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\ \ x-\alpha\ \ ^{n}}$$

Определение 2. Формула Тейлора с остатком типа Пеано в точке α имеет вид

$$f(x)=T_n(x,\alpha)+R_n(x,\alpha),$$

где

$$R_n(x,\alpha)=o(|x-\alpha|^n)$$

называется остатком типа Пеано.

Определение 3. Формула Тейлора с остатком типа Лагранжа в точке α

$$f(x)=T_n(x,\alpha)+R_n(x,\alpha),$$

где

$$R_n(x,\alpha)=\frac{f^{n+1}(\alpha+\theta|x-\alpha|)}{(n+1)!}|x-\alpha|^{n+1},\ 0<\theta<1,$$

называется остатком типа Лагранжа.

Определение 4. В случае, когда $\alpha=0$ вместо фразы «формула Тейлора» говорят «формула Маклорена». Так многочлен Маклорена —

$$\boxed{M_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,}$$

формула Маклорена с остатком типа Лагранжа —

$$f(x)=M_n(x)+\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1,$$

формула Маклорена с остатком типа Пеано —

$$f(x)=M_n(x)+o(x^n)$$

ВАЖНЕЙШИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ!!

1. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x;$ (C)
2. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x$ (S)
3. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n)!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x};$ (EXP)
4. $(1+x)^\lambda=\sum\limits_{k=0}^{n}C_\lambda^k x^k+R_n,\ |x|<1,$ (BN)
   $\left(C_\lambda^k=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-k+1)}{k!},k=1,2,\ldots;\quad C_\lambda^0=1\right);$
5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n^{LN}(0,x),|x|<1.$ (LN)

Экстремумы

Определение 5. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*строгого локального максимума*), если найдется $\delta>0$, что для всех $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется равенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0 \; (\Delta f = f(x) - f(x_0) < 0).$$

Определение 6. Точку x_0 называют *точкой локального минимума* (*строгого локального минимума*), если найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta\, x_0$ выполняется равенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \ge 0 \; (\Delta f = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Определение 7. Точка локального минимума или локального максимума называется точкой *локального экстремума*, а значение функции в такой точке называется *экстремумом функции*.

Если

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,\; f^{(2n)}(x_0) > 0, x_0 - min,$$

то в точке x_0 будет локальный минимум. Когда

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,\; f^{(2n)}(x_0) < 0, x_0 - max,$$

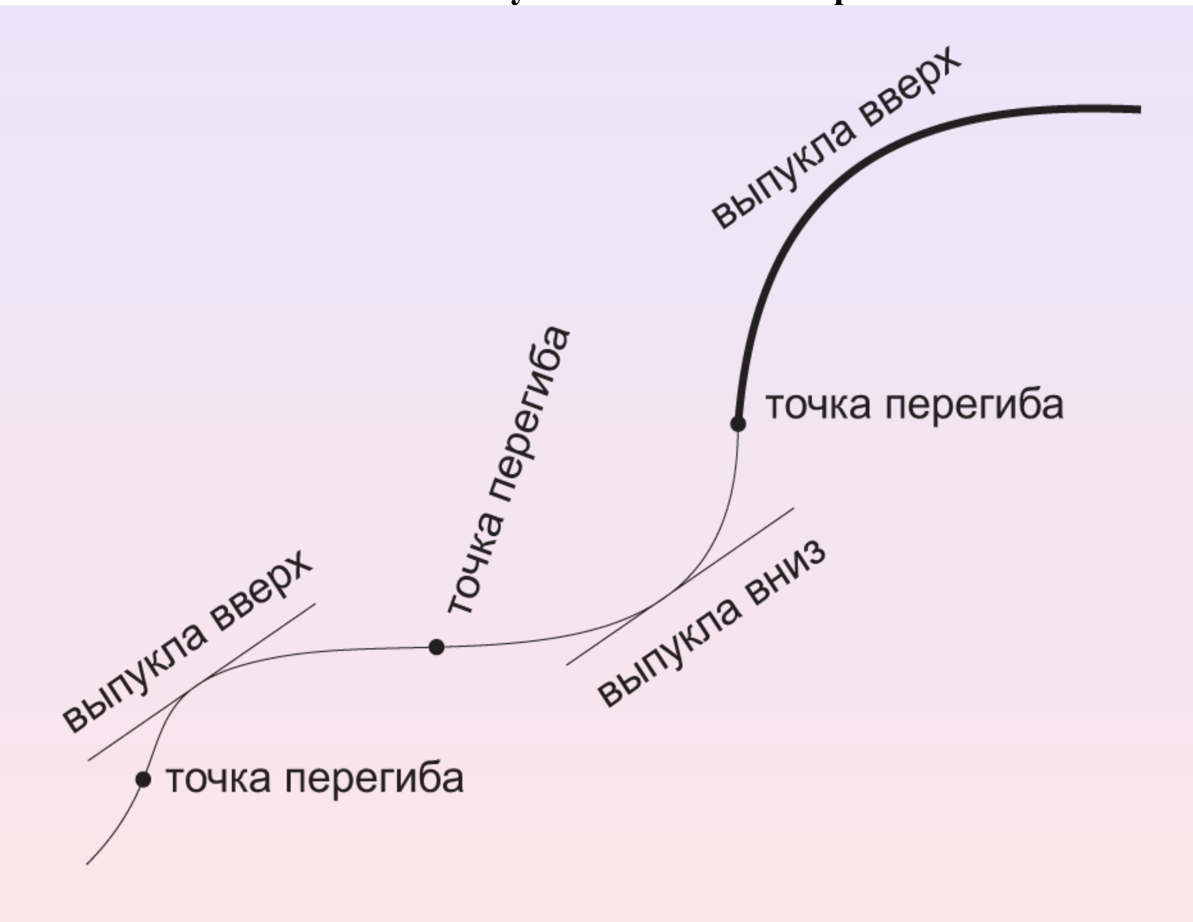
тогда в точке x_0 будет локальный максимум.

Нет экстремума, если

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0,\; f^{(2n+1)}(x_0) \ne 0.$$

Комментарий. Равенство нулю первой производной НЕОБХОДИМО для наличия экстремума в точке x_0 для дифференцируемой функции. Стратегия поиск экстремума — найти нули производной (стационарные точки). Далее вычислить следующие производные в стационарных точках до первого ненулевого значения. Экстремум может быть и в тех точках, где функция не является дифференцируемой. Типичный пример функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Выпуклость и точки перегиба



Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b).

Определение 8. Функция f называется *выпуклой вниз* (*выпуклой вверх*) *в точке* x_0, если график этой функции в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_\delta\ x_0$ лежит выше (ниже) касательной в точке x_0, то есть для всех $x \in \dot{U}_\delta\ x_0$ выполняется

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \quad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

Определение 9. Функция называется *выпуклой вниз* (*вверх*) *на промежутке* P, если она является выпуклой вниз (вверх) в каждой точке промежутка P.

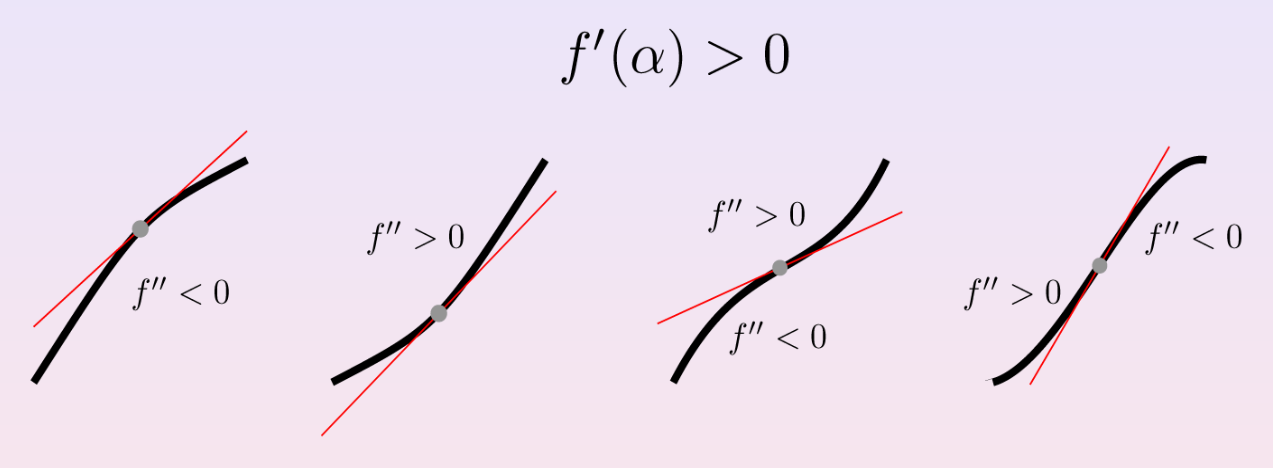
Определение 10. Если существует такое δ, что на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция f выпуклая вверх, а на другом выпуклая вниз, то x_0 называется *точкой перегиба* функции f.

Теорема 1. Пусть функция f имеет требуемое количество непрерывных производных. Тогда справедливы три утверждения:

1) если $f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция выпуклая вниз;

2) если $f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция выпуклая вверх;

3) если $f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0, f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, то точка x_0 является точкой перегиба.



Замечание. Можно (так часто и делают) дать определение выпуклости на интервале, не зависящее от дифференцируемости функции *f*. Пусть дана функция $f:(a,b)\to \mathrm{R}$. Если для любых двух точек x_1, x_2 из интервала (a,b) и всех чисел $\lambda \ge 0, \mu \ge 0, \lambda+\mu=1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)<\lambda f(x_1)+\mu f(x_2) \quad f(\lambda x_1+\mu x_2)>\lambda f(x_1)+\mu f(x_2) \ ,$$

то функция *f* называется выпуклой вниз (вверх) на интервале (a,b).

Задачи с решениями для модуля № 5

Задача 1. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = a^x,\ a > 1, x > 0$?

Решение

◄ Наше уравнение заменим равносильным $a^x x^{-2} = 1$. Изучим поведение функции $f(x) = a^x x^{-2}$. Вычислим производную

$$f'(x) = (-2)a^x x^{-3} + a^x x^{-2} \ln a = a^x x^{-3}\left(-2 + x \ln a\right).$$

Обозначим $\lambda = \dfrac{2}{\ln a}$. Ясно, что $x < \lambda \Rightarrow f'(x) < 0;\ \ x > \lambda \Rightarrow f'(x) > 0$. Итак, $x = \lambda$ является точкой минимума функции $f(x)$. Значит, при $f(\lambda) < 1$ наше уравнение имеет два решения, если $f(\lambda) = 1$ уравнение имеет одно решение, а когда $f(\lambda) > 1$ решений нет. Кстати, $f(\lambda) = \left(\dfrac{e \ln a}{2}\right)^2$. Например, уравнение $x^2 = 2^x$ имеет (проверьте самостоятельно!) два решения. ►

Попробуйте изучить количество решений уравнение $x^a = a^x$.

Задача 2. Найти все корни уравнения $3^x + 4^x = 5^x$

Решение

◀ Запишем наше уравнение в равносильном виде

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Функция $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ является убывающей, ибо

$$f'(x) = \ln\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^x + \ln\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^x < 0.$$

Поэтому наше уравнение имеет единственное решение. Поскольку, очевидно, $x = 2$ является решением, то задача решена. ▶

Задача 3. Разложить по формуле Маклорена функцию
$f(x) = \exp\left(-x^{-2}\right),\ x \neq 0;\quad f(0) = 0.$

Решение

◀ В задаче 3 из модуля № 4 мы вычислили производные нашей функции

$$f^{(n)}(0) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Значит формула Маклорена этой функции имеет интересный вид

$$f(x) = o\left(x^n\right),\ x \to 0,$$

для любого натурального числа n. ▶

Задача 4. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \cos x + |x|^3$.

Решение

◀ ВАЖНО! Записать формулу Тейлора в окрестности точки a можно только тогда, когда в этой точке существуют нужные производные. В нашем случае $\left(|x|^3\right)' = 3x|x|$. Далее $(3x|x|)' = 6|x|$, а функция $6|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. Итак, функция $f(x)$ имеет только две производные $f'(0) = 0$; $f''(0) = -1$ (производные в нуле надо считать по определению). Значит, можно записать только следующую формулу

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right). ▶$$

Задача 5.

1. Оценить погрешность формулы $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$, $|x| < 1$.
2. Для каких x указанная выше формула верна с точностью до 0,001.
3. Вычислить $\sin 1$ с погрешностью не более 0,0001.

Решение

◄ Замечательная формула Тейлора с остатком Лагранжа поможет нам решать подобные задачи. В данном случае нам нужна формула

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x), \; R_7(x) = \frac{\sin^{(7)}(c)}{7!}x^7$$

1. $\Delta \le \dfrac{1}{7!} < \dfrac{1}{5000}$.
2. $|R_7(x)| \le \dfrac{|x|^7}{7!} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow |x| < \sqrt[7]{5} \approx 1,258$.
3. $|R_n(1)| \le \dfrac{1}{n!} < 0,0001 \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \sin 1 \approx 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{120} - \dfrac{1}{5040} \sim 0,8414$.

Контрольные вопросы по модулю № 5:

1. Что такое многочлен Маклорена функции $f\ \ x$?
2. Запишите формулу Тейлора с остатком типа Пеано в точке α.
3. Запишите формулу Тейлора с остатком типа Лагранжа в точке α.
4. Найти формулу Маклорена для функции e^{3x}.
5. Найти формулу Маклорена для функции $\cos 4x$.
6. Найти формулу Маклорена для функции $\ln\ 1+6x$.
7. Найти формулу Маклорена для функции $\sqrt[5]{1+x^2}$.
8. Какая абсолютная погрешность формулы $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ при $0 < x < 0{,}1$.
9. Сформулируйте определение выпуклости вверх (вниз) графика функции.
10. Сформулируйте определение точки перегиба графика функции.

Модуль 6. Интеграл

Определение 1. Если

$$F'(x) = f(x),$$

или

$$dF(x) = f(x)dx,$$

то функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$, а множество всех первообразных функции $f(x)$ обозначают символом

$$\int f(x)dx = \{F(x)\} = F(x) + c$$

и называют ***неопределенныым интегралом***.

$$\int f(x)dx = \{F(x)\} = F(x) + c.$$

Свойство 1

$$\int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Свойство 2

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Свойство 3

$$\int df = f(x) + c.$$

Свойство 4

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Свойство 5 Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Тогда

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$$

Свойство 6 Пусть $F(x)$ первообразная функции $f(x)$. Тогда

$$\boxed{\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c.}$$

ЗНАТЬ и ПОМНИТЬ I

степенная

$$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1;\quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

показательная

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;\quad \int e^u du = e^u + C.$$

$$\int \sin u\, du = -\cos u + C;\quad \int \cos u\, du = \sin u + C.$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;\quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

ЗНАТЬ и ПОМНИТЬ II

$$\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C;\quad \int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C_1,\ a \neq 0.$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C,\ a \neq 0.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C_1,\ a \neq 0.$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+A}\right| + C,\ A \neq 0.$$

Теорема об интегрировании по частям. Пусть функции u, v дифференцируемы на интервале (a,b) и существует первообразная функции

$u'v$. Тогда функция uv' имеет первообразную и справедлива формула (интегрирования по частям)

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

Замечание. Формулу интегрирования по частям кратко записывают в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Теорема о замене переменной. Пусть функция $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ является первообразной функции $f:(a,b)\to\mathbf{R}$. Рассмотрим дифференцируемую функцию $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$. Тогда справедлива формула (замены переменной)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Замечание. Если функция $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ взаимно однозначная, то формулу замены переменной можно записать в виде

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Примеры (разложения рациональных функций на простейшие дроби)

1) $$\frac{4x^3-x^2+2x-1}{x^4-1} = \frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1} = \frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1},$$

2) $$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1} = \frac{1{,}25}{x-1}-\frac{1{,}25}{x+1}-\frac{0{,}5}{(x+1)^2}.$$

Пример. Вычислим тремя способами интеграл

$$I = \int\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

1 способ. Сделаем подстановку

$$\boxed{x=\operatorname{tg}t,\ \sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\cos t},\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t}.}$$

Тогда

$$I = \int\sqrt{1+x^2}\,dx = \int\frac{dt}{\cos^3 t} = \int\frac{\cos t\,dt}{\cos^4 t} = \int\frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

Теперь после замены $\sin t = y$ получим интеграл от рациональной функции

$$I = \int\frac{dy}{(1-y^2)^2}.$$

Мы не будем вычислять этот интеграл, потому что два других способа в данном случае проще.

2 способ. Сделаем подстановку

$$\boxed{x=\operatorname{sh}t,\ \sqrt{1+x^2}=\operatorname{ch}t,\ dx=\operatorname{ch}t\,dt.}$$

Получим интеграл

$$I=\int \operatorname{ch}^2 t dt=\int \frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}dt=\frac{\operatorname{sh} 2t}{4}+\frac{t}{2}+c,$$

где $t=\operatorname{arsh} x$.

3 способ. Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\boxed{\begin{aligned}&u=\sqrt{1+x^2},\ dv=dx;\\ &du=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}},\ v=x;\end{aligned}}$$

$$I=\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-I+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Последний интеграл табличный («длинный логарифм»). Поэтому

$$I=\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+c.$$

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I_m=\int\sin^m t dt.$$

Так как

$$\left(\cos t\sin^{m-1}t\right)'=-\sin^m t+(m-1)\cos^2 t\sin^{m-2}t=-m\sin^m t+(m-1)\sin^{m-2}t,$$

то интегрируя обе части равенства, получим рекуррентную формулу

$$I_m=\int\sin^m t dt=-\frac{1}{m}\cos t\sin^{m-1}t+\frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}t dt=-\frac{1}{m}\cos t\sin^{m-1}t+\frac{m-1}{m}I_{m-2}.$$

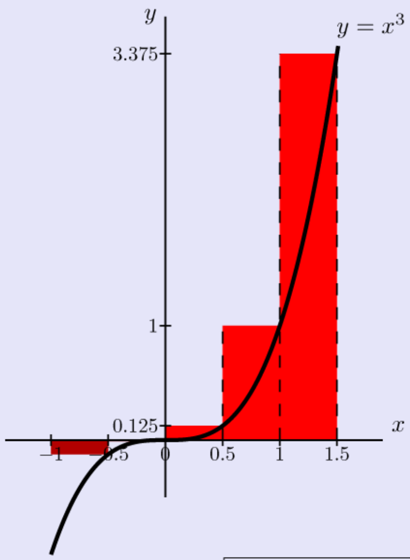
Теперь осталось найти $I_0=\int dt=t,\ I_1=\int\sin t dt=-\cos t.$

Итак, $I_2=\int\sin^2 t dt=-\frac{1}{2}\cos t\sin^{2-1}t+\frac{2-1}{2}I_0=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\cos t\sin t$ и т.д.

Интеграл Римана (определенный интеграл)

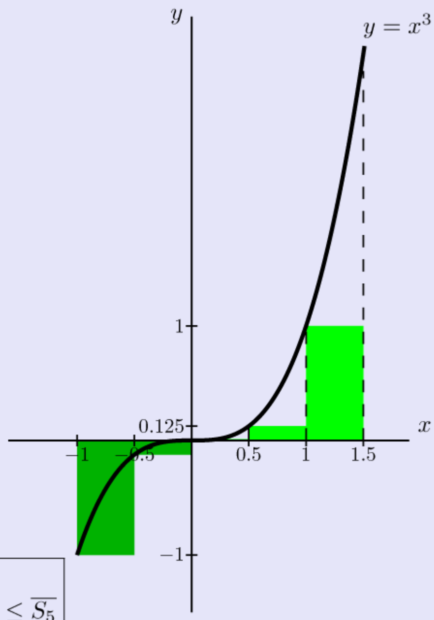
верхняя сумма

$\overline{S_5} = 2,1875$



нижняя сумма

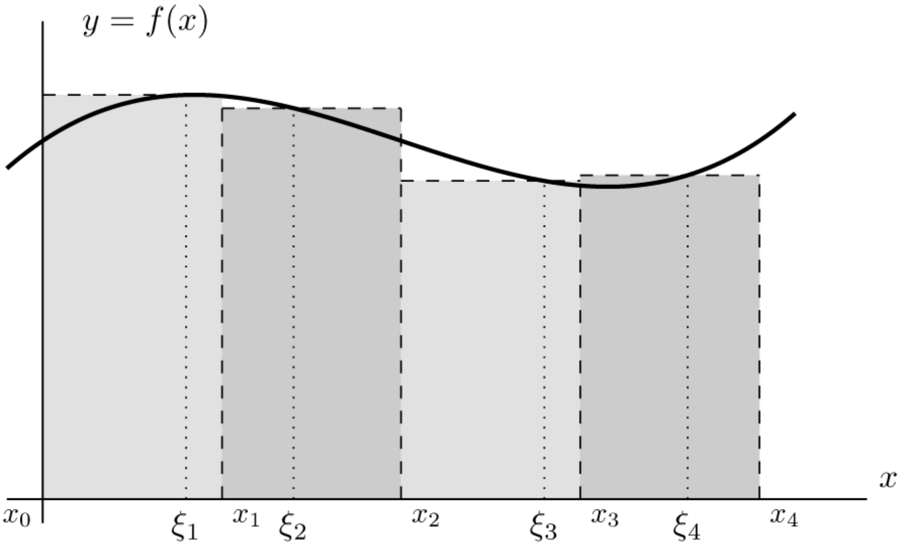
$\underline{S_5} = 0$



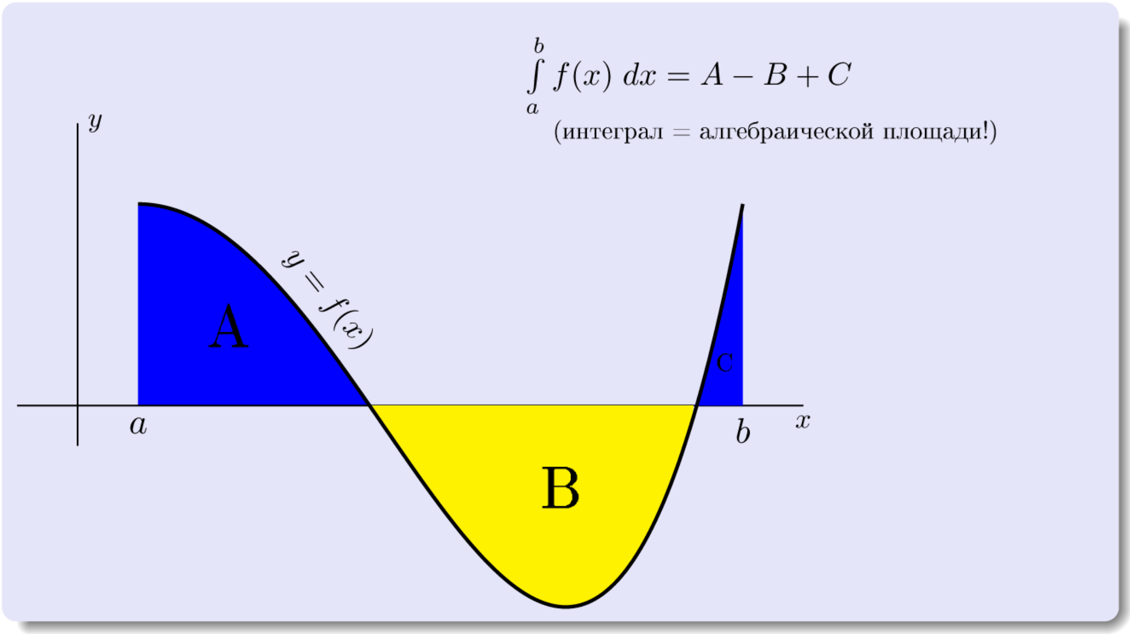
$$\boxed{\underline{S_5} \le J = \int\limits_{-1}^{1,5} x^3 dx = 1,015625 \le \overline{S_5}}$$

Интегральная сумма $\boxed{\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + f(\xi_4)\Delta x_4}$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



x_i - точки (узлы) разбиения, $\qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,



Интегральная сумма $\boxed{\sigma(f,P_\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}$.

Верхняя и нижняя суммы

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x); \quad \underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Интеграл как предел интегральных сумм

$$\boxed{J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{d(P)\to 0} \underline{S}(f,P) = \lim_{d(P)\to 0} \overline{S}(f,P) = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f,P_\xi),}\ d(P) = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k \ .$$

Обозначения и соглашения

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(p)\,dp = \ldots$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Свойства

$$\int_a^b \; f(x) \pm g(x) \;\; dx = \int_a^b f(t)\,dt \pm \int_a^b g(t)\,dt$$ — линейность

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \lambda \in \mathrm{R}$$ — линейность

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$ — аддитивность

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$$ — сохранение неравенства

Оценки

$$\left(\inf_{x\in \; a,b} f(x)\right)(b-a) \leq \int_a^b \; f(x) \;\; dx \leq \left(\sup_{x\in \; a,b} f(x)\right)(b-a).$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b | \, f(x) \, | \, dx.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx, a < \xi < b; g(x) \geq 0 \; (g(x) \leq 0).$$

Важные формулы

Производная по верхнему пределу от непрерывной функции

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Формула Ньютона — Лейбница Пусть $F(x)$ первообразная функции . Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b := F(b) - F(a)}$$

Замена переменной

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt; \qquad \varphi(\alpha) = a, \;\; \varphi(\beta) = b$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\,du;\;\; uv\,|_a^b \equiv u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Полезно знать

Если $f(x)$ — нечетная функция, тогда $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Если $f(x)$ — четная функция, тогда $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Если $f(x)$ — периодическая функция, тогда $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$.

Примеры

Примеры на формулу Ньютона — Лейбница.

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\,|_1^2 = \frac{2^4-1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - \;\; -\cos 0 \;\; = 1.$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\,|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример на замену переменной.

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\,|_1^{\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-1)}{3},\quad t = \sqrt{1+x^2}.$$

Пример на интегрирование по частям.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\;\; -\cos x \;\; = -x\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1.$$

Пример на вычисление пределов последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}.$$

Пример на вычисление пределов по правилу Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos\left(t^2\right)dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x^2\right)}{1}=1.$$

Длина линии

Вычислим *длину траектории* в пространстве $\mathbb{R}^3$, которую задает гладкая вектор-функция $\vec{r}(t), t\in[a,b]$. Вектор скорости в момент времени t равен $\vec{r}'(t)$, а величина скорости равна $\left|\vec{r}'(t)\right|$. Пусть длина траектории за промежуток времени $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ равна $l(\alpha,\beta)$. Тогда справедлива формула

$$l(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta\left|\vec{r}'(t)\right|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt=\int_\alpha^\beta dl.$$

Дифференциальную форму dl называют *дифференциалом длины дуги*. Справедливо равенство (теорема Пифагора для дифференциалов)

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Пусть траектория плоская, то есть можно выбрать систему координат, в которой $z(t)\equiv 0$. Тогда формула длины плоской кривой имеет следующий вид:

$$l(a,b)=\int_a^b\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Задачи с решениями для модуля № 6

Задача 1. Разложить на простейшие дроби $\dfrac{1}{x^4+1}$

Решение

$$◄\ \frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{x^4\pm 2x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2}=$$

$$=\frac{ax+b}{x^2+1+\sqrt{2}x}+\frac{cx+d}{x^2+1-\sqrt{2}x}=\frac{2+\sqrt{2}x}{4\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)}+\frac{2-\sqrt{2}x}{4\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)}.$$

Чтобы найти коэффициенты a,b,c,d мы решили систему

$$\begin{aligned}
x^3 &: \ a+c=0,\\
x^2 &: \ b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0,\\
x^1 &: \ a-\sqrt{2}b+c+\sqrt{2}d=0,\\
x^0 &: \ b+d=1,
\end{aligned}$$

которую получили из тождества

$$1\equiv(x^2+1-\sqrt{2}x)(ax+b)+(x^2+1+\sqrt{2}x)(cx+d)\ ►$$

Задача 2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Решение

◀ Подынтегральная функция вряд ли имеет элементарную первообразную. Сделаем замену переменной $x = \pi - t$. Тогда

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I.$$

Значит,

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{arctg} x|_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ответ $I = \dfrac{\pi^2}{4}$. ▶ $\boxed{\text{Можно показать, что } \int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx}$

Задача 3. Вычислить $\int\limits_1^{-1} \cos^2 x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$

Решение

◀ Удивительно, но ответ можно получить сразу, если заметить, что подынтегральная функция является нечетной, ибо
$\cos^2(-x)\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) \equiv -\cos^2 x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Поэтому $\int\limits_1^{-1} \cos^2 x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = 0$. ▶

Задача 4. Что больше $\int\limits_0^{\pi} \exp\left(\sin^2 x\right) dx$ или $\dfrac{3\pi}{2}$?

Решение

◄ Так как верно неравенство $\exp\left(\sin^2 x\right) > 1 + \sin^2 x$ (смотри задачу 2 из модуля 4), то можно написать

$$\int\limits_0^{\pi} \exp\left(\sin^2 x\right) dx > \int\limits_0^{\pi} \left(1 + \sin^2 x\right) dx = \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{3\pi}{2}.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{\pi} \exp\left(\sin^2 x\right) dx > \frac{3\pi}{2} \ ►$$

Контрольные вопросы по модулю № 6:

1. Дайте определение первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.
2. Чем отличаются две первообразные одной и той же функции?
3. Будет ли $F(x) = \sin 2x$ первообразной функции $f(x) = \cos 2x$?
4. Найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ такую, что $F(1) = 1$.
5. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
6. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
7. На какие простейшие дроби раскладывается следующая рациональная функция $\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}$?
8. Приведите пример разбиения отрезка $[-1,1]$ на 5 частей.
9. Что такое интегральная сумма?
10. Интегрируема ли функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[-1,1]$?
11. Пусть одна из функций интегрируема, а вторая функция нет. Будет ли интегрируема сумма этих функций?

12. Пусть $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$. Следует ли тогда, что $f(x) \ge 0$?

13. Запишите формулу для вычисления длины части графика функции $y = f(x)$, если $x \in [a,b]$.

14. Запишите формулу для вычисления длины части графика в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha,\beta]$.

15. Вычислите $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^{2x} f(t)\,dt\right)$.

16. Вычислите длину участка параболы $y = x^2$, $x \in [0,3]$.

Модуль 7. Функции многих переменных

Определение 1. Пусть $f(a) = f(a_1,\ldots,a_n)$; $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда *частная производная* функции $f(x)$ в точке a по переменной x_s определяется следующей формулой:

$$\boxed{\frac{\partial f(a)}{\partial x_s} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_s+h,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_s,\ldots,a_n)}{h}, 1 \le s \le n.}$$

Например, для функции трех переменных $f(\vec{X}) = f(x,y,z)$, $f(\vec{A}) = f(a,b,c)$ будем иметь определение

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h,c) - f(a,b,c)}{h},\ x_2 = y.$$

Пример вычисления частных производных (три переменные)

$$u = f(x,y,z) = xy^2z^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3,2) = 72,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,3,2) = 48,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,3,2) = 108.$$

Дифференциал функции двух переменных

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.}$$

Дифференциал функции трех переменных

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.}$$

Дифференциал функции n переменных

$$u = f(\xi_1,\ldots,\xi_n),\ df \equiv du = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n}d\xi_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}d\xi_i.$$

Свойства дифференциала

$$d(f \pm g) = df \pm dg.$$

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}, g \neq 0.$$

Пример вычисления дифференциала (две переменные)

$$z = f(x, y) = \frac{x}{y},$$

$$df \equiv dz = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

$$df(1,1) = dx - dy.$$

Пример вычисления дифференциала (три переменные)

$$u = f(x, y, z) = xy^2z^3,$$

$$df = y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz,$$

$$df(1,3,2) = 72dx + 48dy + 108dz.$$

Дифференцируемость функций двух переменных

$$f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) - f(\alpha, \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\rho),$$

$$\rho = \left|\overrightarrow{MM_0}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},\ M = (\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y), M_0 = (\alpha, \beta).$$

Теорема 1 (достаточное условие дифференцируемости). Пусть функция имеет непрерывные частные производные в точке M_0. Тогда функция дифференцируема в этой точке.

Пример дифференцирования сложной функции (композиции функций). Одна переменная: $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$, $\psi(x) = f(x, y(x))$ тогда

$$\boxed{\varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},}$$

$$\boxed{\psi'(x) = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.}$$

Две переменные:

$$g = g(\eta_1, \eta_2, \eta_3), H(x, y) = g(f(x, y), p(x), q(y)).$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=g_1'\frac{\partial f}{\partial x}+g_2'p';\ \frac{\partial H}{\partial y}=g_1'\frac{\partial f}{\partial y}+g_3'q',\ \text{где}\ \ g_k'=\frac{\partial g}{\partial\eta_k}$$

Переход к полярным координатам.

$$F(r,\varphi)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi),\ \ x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}$$

Градиент

$$\vec{\nabla}f\equiv\operatorname{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1},\frac{\partial f}{\partial\xi_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial\xi_n}\right).$$

Производная по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}(\vec{a})=\lim_{\tau\to0}\frac{f(\vec{a}+\tau\vec{e})-f(\vec{a})}{\tau},\vec{e}\in\mathrm{R}^n,|\vec{e}|=1.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}=\vec{\nabla}f\cdot\vec{e}}$$

Формула Тейлора для функции *n* переменных

Формула с остатком типа Лагранжа

$$\boxed{\begin{aligned}&f(a+h)=f(a)+df(a)(h)+\ldots+\frac{d^mf(a)(h)}{m!}+\frac{d^{m+1}f(a+\theta h)(h)}{(m+1)!},\\&m=0,1,\ldots,\ 0<\theta<1.\end{aligned}}$$

Формула с остатком типа Пеано

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+df(a)(h)+\ldots+\frac{d^mf(a)(h)}{m!}+o(|h|^m),|h|\to0.}$$

Формула с остатком типа Лагранжа для двух переменных $m=1$

$$f(M_1)=f(M_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2f(M_\theta)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2f(M_\theta)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2f(M_\theta)}{\partial y^2}\Delta y^2\right),$$

и формула с остатком типа Пеано для двух переменных $m=2$

$$f(M_1)=f(M_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+$$
$$+\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}\Delta y^2+o\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right),$$

где $M_0=(x_0,y_0);M_1=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y);M_\theta=(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y);\theta\in[0,1]$

Экстремум функции *n* переменных

Теорема 2. (необходимое условие экстремума) Если в точке a локального экстремума функция f является дифференцируемой, то эта точка будет стационарной ($df(a)\equiv 0$).

Теорема 3. (достаточное условие экстремума) Пусть функция f дважды дифференцируема, точка a является стационарной, и второй дифференциал является невырожденной квадратичной формой от переменной h. Тогда справедливы три утверждения:

Если $d^2f(a)(h)$ — положительно определенная квадратичная форма,то a — точка локального минимума;

Если $d^2f(a)(h)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то a — точка локального максимума;

Если $d^2f(a)(h)$ — знакопеременная квадратичная форма, то в точке a нет экстремума.

Теорема 4. В случае двух переменных введем следующие обозначения: $a=(x_0,y_0),u=f(x,y),A=f''_{xx}(a);B=f''_{xy}(a),C=f''_{yy}(a)$. Пусть $df(a)=0$ тогда справедливы три утверждения:

$$A>0,AC-B^2>0,$$

то в точке a — локальный минимум

$$A<0,AC-B^2>0,$$

то в точке a — локальный минимум

$$AC-B^2<0,$$

то в точке a — нет экстремума.

Задача 1. На плоскости расположены система из трех материальных точек $P_1(x_1,\, y_1)$, $P_2(x_2,\, y_2)$, $P_3(x_3,\, y_3)$ с массами m_1, m_2, m_3. Требуется найти такую точку $P(x,\, y)$, чтобы момент инерции системы относительно этой точки был минимальным.

Решение

◄ Обозначим $M = \sum\limits_{k=1}^{3} m_k$. Будем исследовать на экстремум функцию

$$I(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \left(m_k \left((x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 \right) \right).$$

Найдем стационарные точки, решая систему

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 2\sum_{k=1}^{3} (m_k(x-x_k)) = 0; \;\; \frac{\partial I}{\partial y} = 2\sum_{k=1}^{3} (m_k(y-y_k)) = 0.$$

Находим единственное искомое решение $x = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{3} m_k x_k}{M}$; $y = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{3} m_k y_k}{M}$. ►

Задача 2. При измерении радиуса основания R и высоты H цилиндра были получены следующие результаты: $R = 2,5 \pm 0,1$; $H = 4,0 \pm 0,2$. С какой абсолютной погрешностью Δ и относительной погрешностью δ может быть вычислен объем цилиндра?

Решение

◄ Важно запомнить, что дифференциал функции является абсолютной погрешностью при вычислении значений функции, т.е.

$$\Delta = df(a,b,\ldots) = \frac{\partial f(a,b,\ldots)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(a,b,\ldots)}{\partial y}dy + \ldots,$$

где dx, $dy, \ldots$ – погрешности измерения соответствующих координат.
В нашем случае: $f(R,H) = \pi R^2 H$, $dR = 0,1$, $dH = 0,2$, $a = 2,5$, $b = 4,0$.
Находим $\dfrac{\partial f(a,b,\ldots)}{\partial R} = \pi \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 4,0 \approx 62,8$; $\dfrac{\partial f(a,b,\ldots)}{\partial H} = \pi \cdot 2,5^2 \approx 19,6$.
Понадобится и значение $f(a,b) \approx 78,5$. Итак,

$$\Delta = 62,8 \cdot 0,1 + 19,6 \cdot 0,2 \approx 10,2; \ \delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{f(a,b)} \approx 13\%$$

Задача 3. На поверхности

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$$

требуется найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости Oxy.

Решение

◄ Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = const$, то уравнение касательной плоскости будет иметь вид

$$F_x^{'}(M_0)(x - x_0) + F_y^{'}(M_0)(y - y_0) + F_z^{'}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Здесь $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$, а $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – точка на нашей поверхности. По условию касательная плоскость должна задаваться уравнением $z = z_0$. Значит, точка M_0 должна быть решением системы

$$F_x^{'}(M_0) = 0; F_y^{'}(M_0) = 0; F(M_0) = o.$$

Решением системы являются две точки: $\left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0\right)$ и $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0\right)$

Задача 4. Разложить $F(x,y)=x^y$ по формуле Тейлора с остатком Пеано в окрестности точки $M_0=(1,1)$ до членов второго порядка включительно.

Решение

◀
Общий вид формулы Тейлора, в данном случае, имеет вид

$$F(x,y)=F(1,1)+dF(1,1)+\frac{1}{2}d^2F(1,1)+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right).$$

Так как
$F(1,1)=F_x^{'}(1,1)=F_{xy}^{''}(1,1)=1;\ F_y^{'}(1,1)=F_{xx}^{''}(1,1)=F_{yy}^{''}(1,1)=0$, то искомая формула имеет вид

$$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right).$$

Кстати, устно можно получить приближенную формулу $1,1^{1,1}\approx 1,11$

Задача 5. Сделать замену переменных $\xi=x+y,\ \eta=x-y$ в уравнении

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y} \qquad (1)$$

Решение

◀ Надо внимательно разобрать условие задачи. Есть исходная функция $z=z(x,y)$ и должна появиться новая функция $\tilde{z}=\tilde{z}(\xi,\eta)$. Между этими функциями есть связь $\boxed{z(x,y)\equiv\tilde{z}(x+y,x-y)}$. Вот это тождество и позволит решить нашу задачу. Дифференцируем это тождество по переменным x,y, используя цепное правило,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\xi}\cdot 1+\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\eta}\cdot 1;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\xi}\cdot 1-\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\eta}\cdot 1.$$

Подставив эти соотношения в уравнение (1), получим уравнение

$$\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\eta}=0\Rightarrow z(x,y)=f(x+y),\ f\in C^{(1)}(\mathbb{R}).$$

Контрольные вопросы по модулю № 7:

1. Дайте определение замкнутого и открытого множеств.

2. Дайте определение двойного предела и повторных пределов.
3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$?
4. Приведите пример функции $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, точки разрыва которой заполняют окружность.
5. Дайте определение частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,1)$.
6. Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции $z=x^2+y^2$ в точке $(1,1)$.
7. Пусть $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Найдите $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
8. Как вычисляется $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, если $F(x,y)=f(x+y,xy)$?
9. Найдите du, если $u=\sqrt{x^2+y^2}$.
10. Запишите формулу для $d^2u(0,1)$, если $u=f(x,y)$.
11. Что такое стационарная точка функции $u=f(x,y)$?
12. Запишите формулу Маклорена $(a=(0,0))$ для функции $f(x,y)$ с остатком типа Пеано.

Модуль 8. Несобственные интегралы

Определение 1. Пусть для любого $c\in(a,b)$ функция f ограничена и интегрируема на отрезке $[a,c]$, но не является ограниченной на промежутке $[a,b)$. Тогда точку b будем называть $b-$ *особой точкой функции f*. Если функция не ограничена на промежутке $(a,b]$, но является ограниченной и интегрируемой на любом отрезке $[c,b]$, то точку a будем называть $a+$ *особой точкой функции f*. Если функция *f*(x) задана на неограниченном промежутке $[a,+\infty)$ $((-\infty,b])$, то особой точкой функции будем называть также $+\infty$ $(-\infty)$, или обе одновременно, когда функция задана на множестве $\mathbf{R}$.

Определение 2. Пусть у функции $f:(a,b]\to\mathbf{R}$ есть единственная особая точка $a+$. Обозначим $F(c)=\int_c^b f(t)dt$, где $a<c<b$. Если существует

$$\lim_{c\to a+} F(c)=I,$$

то будем говорить, что несобственный интеграл от функции f *сходится* в $a+$ особой точке, и писать $I=\int_a^b f(t)dt$. Когда предел $\lim\limits_{c\to a+} F(c)$ не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(t)dt$ *расходится*. Число I называется *значением* данного несобственного интеграла.

Замечание. В случае $b-$ особой точки полагаем $F(c)=\int_a^c f(t)dt$, $a<c<b$, и получаем аналогичное определение несобственного интеграла, который сходится в особой точке $b-$, если существует $\lim\limits_{c\to b-} F(c)$ и расходится в противном случае.

Определение 3. Рассмотрим функцию $f:[a,+\infty)\to \mathbf{R}$. Пусть $F(c)=\int_a^c f(t)dt$, где $c>a$. Если существует

$$\lim_{c\to+\infty} F(c)=I,$$

то будем говорить, что несобственный интеграл от функции f *сходится в* $+\infty$, и писать $I=\int_a^{+\infty} f(t)dt$. В противном случае, говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *расходится*. Число I называется *значением* данного несобственного интеграла.

Замечание. В случае функции $f:(-\infty,b]\to \mathbf{R}$ (особая точка $-\infty$) интеграл $I=\int_{-\infty}^b f(t)dt$ сходится, когда существует предел $\lim\limits_{c\to-\infty} F(c)$, где $F(c)=\int_c^b f(t)dt$.

Определение 4. Пусть P промежуток и функция $f:P\to \mathbf{R}$ имеет на этом промежутке конечное множество особых точек. Если интеграл от функции f сходится (с учетом аддитивности) в каждой особой точке, то будем говорить, что интеграл $\int_P f(t)dt$ *сходится*. В противном случае говорят, что интеграл $\int_P f(t)dt$ *расходится* (это означает, что он расходится хотя бы в **одной** особой точке). Все такие интегралы называются *несобственными интегралами*.

Важные примеры (советуем ЗАПОМНИТЬ).

Пример 1. Особая точка $+\infty$. Интеграл

$$I_\gamma=\int_1^{+\infty} x^\gamma dx$$

сходится при $\gamma<-1$ и расходится при $\gamma\geq-1$, так как,

$$F(c)=\int_1^c x^\gamma dx=\begin{cases} \dfrac{c^{\gamma+1}}{\gamma+1}-\dfrac{1}{\gamma+1}, & \gamma\neq-1,\\ \ln c, & \gamma=-1.\end{cases}$$

Поэтому предел $\lim\limits_{c\to+\infty} F(c)$ существует только при $\gamma<-1$.

Пример 2. Особые точки $b-$ и $a+$. Интегралы

$$\int_a^b (b-x)^\gamma dx;\ \int_a^b (x-a)^\gamma dx$$

сходятся при $\gamma>-1$, и расходятся при $\gamma\leq-1$.

Пример 3. Интеграл

$$I_\gamma = \int_0^{+\infty} x^\gamma dx$$

расходится при любых γ. Здесь две особых точки $0+$ и $+\infty$, а один из интегралов в сумме

$$\int_0^{+\infty} x^\gamma dx = \int_0^1 x^\gamma dx + \int_1^{+\infty} x^\gamma dx$$

обязательно расходится (пример 1 или 2).

Далее ω — некоторая особая точка.

Признак сравнения. Если $0 \le f(t) \le g(t)$, то из сходимости интеграла $\int_a^\omega g(t)dt$ следует сходимость интеграла $\int_a^\omega f(t)dt$. Кроме того, если интеграл $\int_a^\omega f(t)dt$ расходится, то интеграл $\int_a^\omega g(t)dt$ также расходится.

Признак сравнения в предельной форме. Пусть $f(t) \ge 0,\ g(t) > 0$. Если

$$\lim_{t\to\omega} \frac{f(t)}{g(t)} = \lambda > 0, \qquad (*)$$

то интегралы $\int_a^\omega f(t)dt$, $\int_a^\omega g(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^6+x+4}dx$$

сходится, ибо

$$\frac{x^3+1}{x^6+x+4} \sim \frac{1}{x^3},\ x \to \infty.$$

Признак условной сходимости несобственных интегралов.

Если подынтегральная функция меняет знак на промежутке интегрирования, то признаки, которые даны выше, могут и не дать ответа. В этом случае часто удается представить подынтегральную функцию в виде произведения двух множителей так, что можно применить следующую теорему:

Признак Дирихле. Пусть выполняются условия:

1) первообразная функции $f(t)$ ограничена $\left(\left|\int_a^x f(t)dt\right| < M\right)$ на промежутке $[a,\omega)$,
2) функция $g(t)$ неотрицательна на промежутке $[a,\omega)$,
3) функция $g(t)$ убывает и стремится к нулю $\lim_{t\to\omega} g(t) = 0$.

Тогда сходится интеграл

$$\int_a^\omega f(t)g(t)dt.$$

Замечание. Часто путают условие 1) из теоремы 1 с условием ограниченности функции $|f(t)| < M$. ЗАПОМНИТЕ — не функция f , а её ПЕРООБРАЗНАЯ должна быть ограничена.

Пример 5. Интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

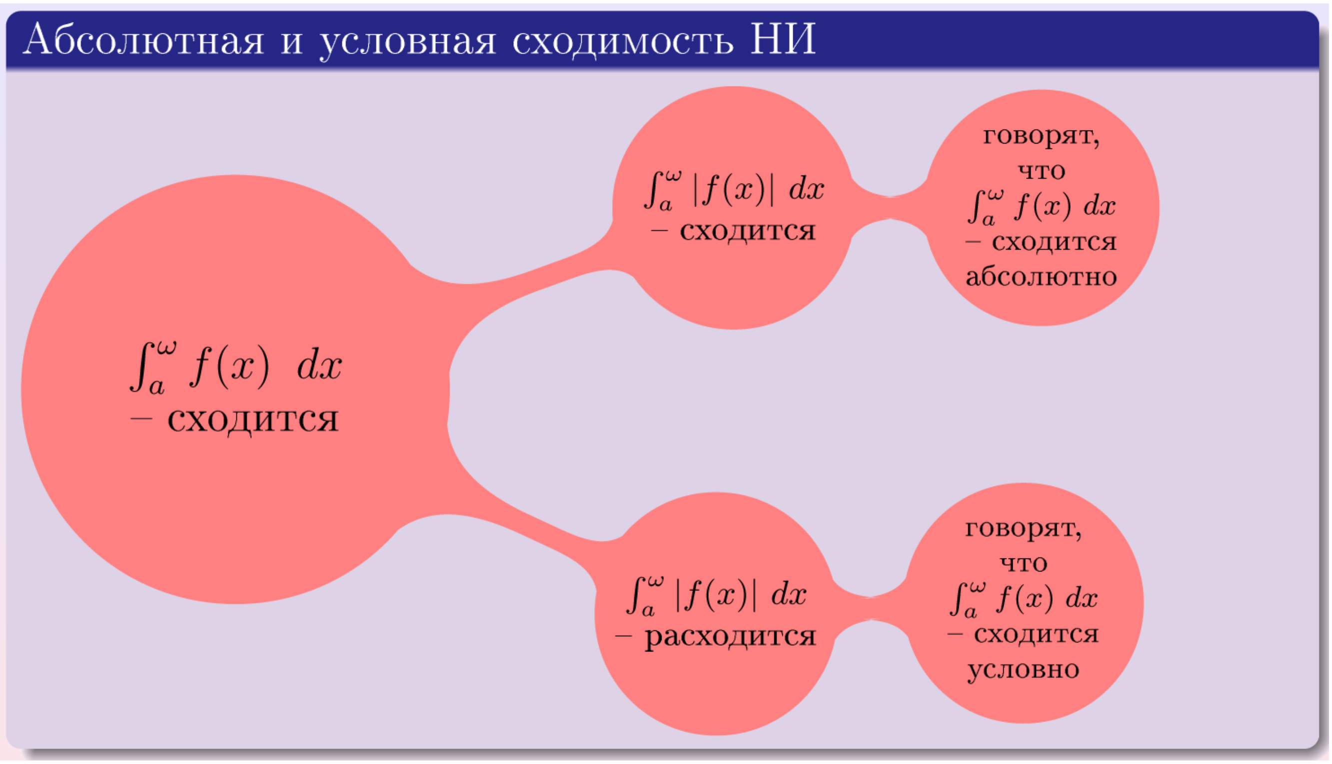
сходится, так как первообразная $F(x) = \sin x$ функции $f(x) = \cos x$ ограничена, а функция $g(x) = 1/x$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Кстати, этот интеграл сходится условно, ибо

$$\left|\frac{\cos x}{x}\right| \geq \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2x} + \frac{\cos 2x}{2x}.$$

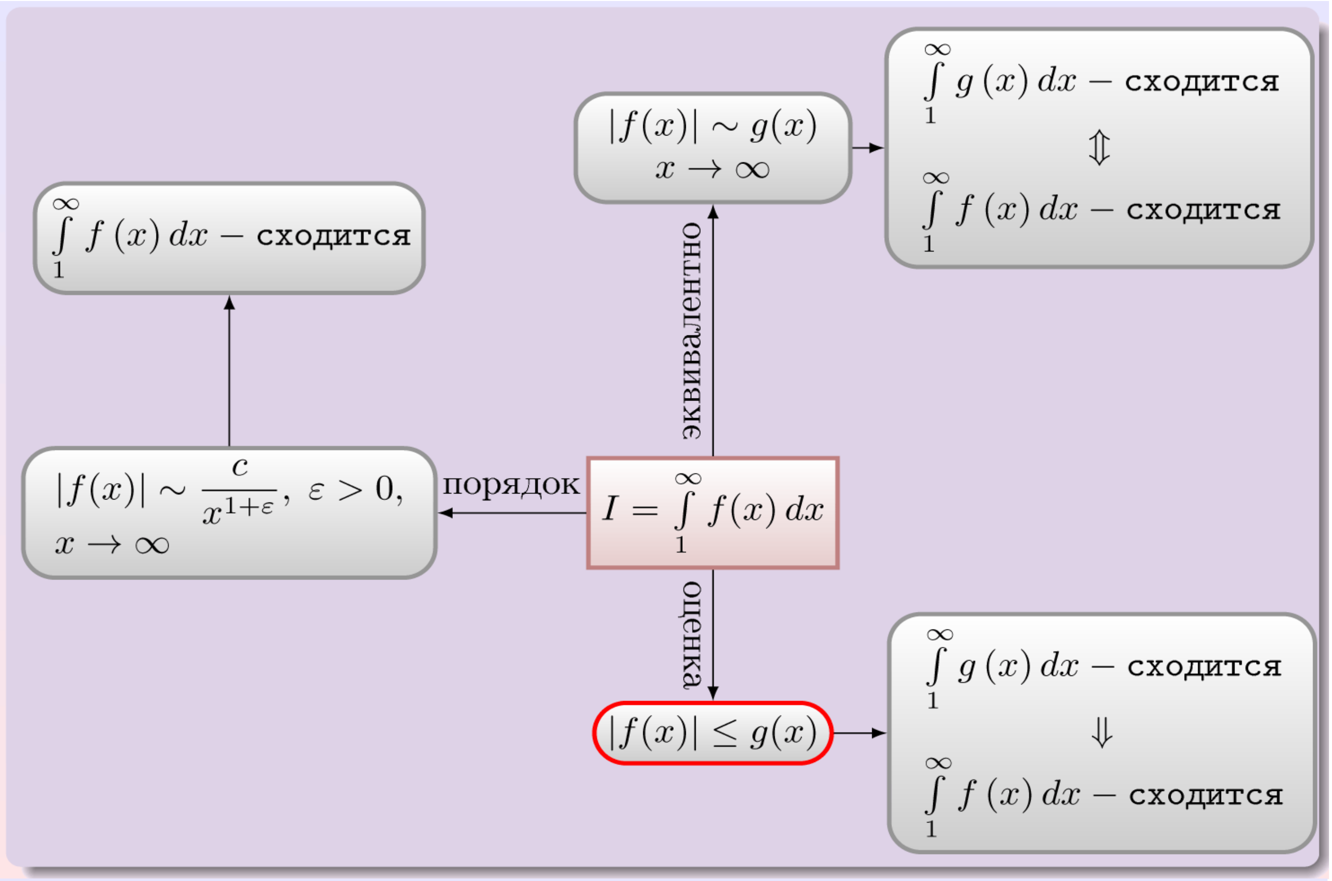
Но интеграл $\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, а интеграл $\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится по признаку Дирихле. Значит, по признаку сравнения интеграл

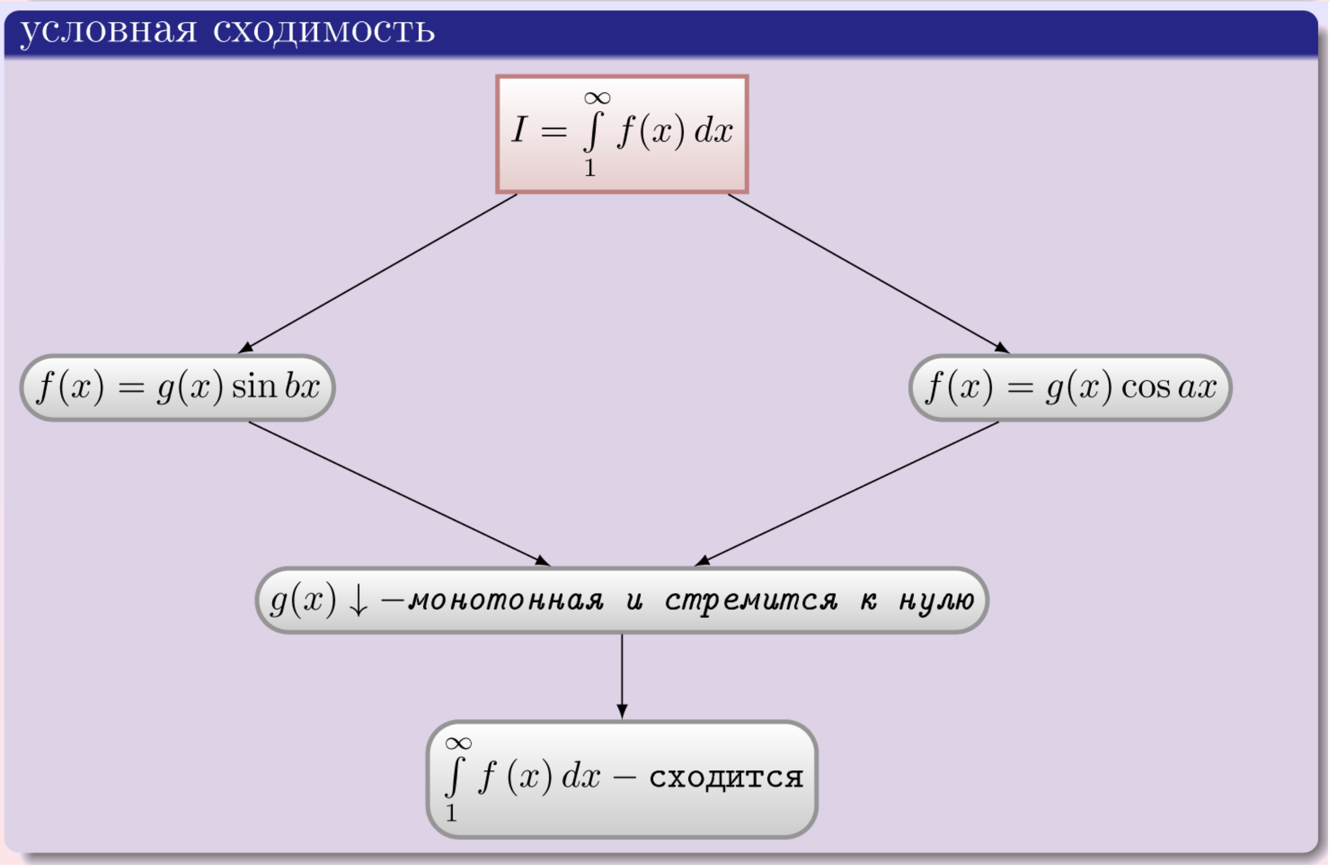
$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$$

расходится. Полезно изобразить графики подынтегральных функций.



Абсолютная сходимость





Собственные интегралы, зависящие от параметра

Введем обозначение:

$\Pi = [a,b] \times [c,d] \equiv X \times Y = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le x \le d\}$,

Интегралом зависящим от параметра называют функцию

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx,\ y \in Y.$$

Пример 6. Исследователям в разных областях науки недостаточно элементарных функций. Многие новые функции (их часто называют «специальные функции») возникают как интегралы, зависящие от некоторого параметра. Чтобы работать с такими функциями, надо уметь их дифференцировать, интегрировать и т. п. Рассмотрим три примера интегралов:

1) $\int_0^1 \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$, 2) $\int_0^1 t^a (1-t)^b\,dt$, 3) $\int_0^\infty x^y \exp(-x)dx$.

Все эти интегралы являются интегралами, зависящими от параметров a, b, y .

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике Π, то функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна отрезке Y, то есть

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right) dx = \int_a^b f(x,y_0)dx$$

Теорема 2. Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике Π и $t \in Y$. Тогда справедливо равенство

$$\int_c^t F(y)dy = \int_c^t dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^t f(x,y)dy.$$

Теорема3.(правило Лейбница) Предположим, что функции $f(x,y), f_y'(x,y)$ непрерывны на прямоугольнике Π. Тогда функция F дифференцируема на отрезке Y, причем справедлива формула

$$F'(y) =: \frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f_y'(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

Если верхний предел зависит от параметра, то

$$\frac{d}{dy} \int_a^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_a^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx + b'(y) f(b(y),y).$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 5. Пусть ω — особая точка. Будем говорить, что интеграл $I(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ *сходится равномерно на множестве* Y, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon > a\ \forall A > A_\varepsilon\ \forall y \in Y \left(\left| \int_A^\omega f(x,y)dx \right| < \varepsilon \right).$$

Замечание. Далее мы будем считать (для определенности), что $\omega = \infty$. Для конечных особых точек нетрудно получить аналогичные результаты. Кроме того, пусть $Y = [c,d]$.

Теорема 4. (*признак Вейерштрасса)* Пусть найдется функция $g(x)$ (мажоранта) такая, что для всех $x > a$ и $y \in [c,d]$ справедливо неравенство $|f(x,y)| \le g(x)$. Если интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ сходится, то интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$.

Теорема 5. (*непрерывность НИЗОП)* Пусть функция f непрерывна в полосе $\Pi_\infty = [a,\infty) \times [c,d]$, и интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ непрерывна на отрезке $[c,d]$.

Теорема 6. (*интегрируемость НИЗОП)* Пусть выполнены условия теоремы 2 Тогда справедливо равенство

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Теорема 7. (*дифференцируемость НИЗОП)* Пусть функции $f(x,y)$, $f_y'(x,y)$ непрерывны в полосе Π_∞. Интеграл $I(y_0) = \int_a^\infty f(x,y_0)dx$ сходится при некотором y_0, а интеграл $\int_a^\infty f_y'(x,y)dx$ сходится равномерно (по y) на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$, причем справедлива формула

$$I'(y) =: \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Пример 7. Покажем, что справедливо равенство

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.}$$

Интеграл (в рамке) называют интегралом Дирихле. Чтобы доказать указанную формулу, рассмотрим вспомогательный интеграл

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Этот интеграл равномерно сходится на отрезке $[t_0,T], T > t_0 > 0$ по теореме 6 (мажорантой является функция e^{-xt_0}). По этой же причине равномерно сходится на отрезке $[t_0,T]$ интеграл $\int_0^\infty e^{-xt}\sin x dx$. По теореме 9 (и после двух интегрирований по частям во втором равенстве) получим

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-xt}\sin x dx = -1 + t^2 \int_0^\infty e^{-xt}\sin x dx.$$

Откуда находим

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Тогда

$$F(t) = \int_t^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t,$$

так как

$$|F(t)| \le \int_0^\infty e^{-xt} dx = \frac{1}{t} \to 0$$

при $t \to \infty$. Осталось показать, что функция $F(t)$ непрерывна на отрезке [0,1]. Для этого надо проверить условия теоремы 2. Не очевидна равномерная сходимость интеграла

$$\int_1^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x} dx$$

на отрезке [0,1] (нижний предел мы взяли равным единице, ибо этого достаточно). Признак Вейерштрасса не работает, ибо интеграл

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

расходится. Попробуем доказать по определению, интегрируя по частям. Тогда

$$\left| -\int_A^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| -\int_A^\infty \frac{1}{x} d\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2}(t\sin x + \cos x) \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{A}\left(\frac{e^{-At}}{1+t^2}(t\sin A + \cos A) \right) - \int_A^\infty \frac{1}{x^2}\left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2}(t\sin x + \cos x) \right) dx \right| \le$$

$$\le \frac{3}{A} \to 0, A \to \infty.$$

Откуда следует равномерная сходимость интеграла

$$\int_1^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x} dx$$

на отрезке [0,1], а, значит, и непрерывность функции $F(t)$ на этом отрезке. Итак,

$$\lim_{t\to 0+} F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t\to 0+}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Кстати, для интегралов Френеля справедливы формулы

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Задачи с решениями для модуля № 8

Задача 1. Исследовать сходимость интегралов:

$$1) \int_1^\infty \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx; \quad 2) \int_1^\infty \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx$$

Решение

◄ Полезно запомнить, что интегралы $I_c = \int_1^\infty \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx; \quad I_s = \int_1^\infty \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx$ сходятся, когда $\lambda > 0$. Интегрируем по частям

$$\int_1^\infty \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx = \left.\frac{\sin ax}{ax^\lambda}\right|_1^\infty + \lambda \int_1^\infty \frac{\sin ax}{x^{\lambda+1}} dx = \frac{\sin a}{a} + \lambda I$$

В силу оценки $\left|\frac{\sin ax}{x^{\lambda+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{\lambda+1}}$, $\lambda > 0$ интеграл I сходится абсолютно. Значит, интеграл I_c (аналогично интеграл I_s) сходится. ►

Задача 2. Исследовать сходимость интегралов:

$$1)\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx;\quad 2)\int\limits_1^\infty \cos x^2 dx;\quad 3)\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx;\quad 4)\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

Решение

◀ Первый интеграл сходится (см. задачу 1)

Второй интеграл после замены $x^2 = t$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ $\int\limits_1^\infty \cos x^2 dx = \int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$, очевидно, тоже сходится. Два оставшихся интеграла расходятся, так как интеграл (надо вспомнить тригонометрию)

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$$

равен разности расходящегося и сходящегося интегралов, а $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx > \int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ ▶

Задача 3. Вычислить $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx, a > 0, b > 0.$

Решение

◀ Сначала вычислим интеграл $I(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}dx, \lambda > 0.$

Дифференцируя по параметру λ, получаем

$$I'(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow I(\lambda) = \ln\lambda + C,$$

но $I(1) = 0$, поэтому $C = 0$. Итак, $I(\lambda) = \ln\lambda$. Теперь исходный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} \pm e^{-x} - e^{-bx}}{x}dx = I(b) - I(a) = \ln\frac{b}{a}.$$

▶

Задача 4. Вычислить $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$

Решение

◀ Рассмотрим табличный интеграл $J(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)}$. Дифференцируем этот интеграл по параметру несколько раз (например, три раза), получим

$$J^{(3)}(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)^4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2\alpha^3\sqrt{\alpha}}.$$

Заметив закономерность, получим ответ для искомого интеграла при $\alpha = a^2$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots (2n)}\frac{\pi}{2a^{2n+1}}.$$

◀

Задача 5. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-x^2+2x-3\right)}dx.$

Решение

◀ Воспользуемся замечательным интегралом Эйлера – Пуассона

$$I = \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Так как $-x^2+2x-3 = -(x-1)^2-2$, то после замены $x-1=t$ получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-x^2+2x-3\right)}dx = e^{-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt == \sqrt{\pi}e^{-2}.$$

Этот метод годится и для более общего интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-ax^2-2bx-c\right)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2-ac}{a}\right), a > 0.$$

Контрольные вопросы по модулю № 8:

1. Укажите особые точки функции $f(x)=\operatorname{arctg} 2x$ на $\mathbb{R}$.
2. Укажите особые точки функции $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)\sin x}$ на $\mathbb{R}$.
3. При каких a сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^a}$?
4. При каких a сходится интеграл $\int\limits_0^{1}\dfrac{dx}{(x-1)^a}$?
5. Сформулируйте признак сравнения в предельной форме.
6. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$?
7. Пусть сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$. Обязательно ли сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} |f(x)|\,dx$?
8. Сформулируйте определение условно сходящегося интеграла.
9. Чем отличается СИЗОП от НИЗОП?
10. Будет ли интеграл $\int\limits_0^{1}\ln(x^4+y^4)\,dx$ СИЗОП, если $y\in[-1,1]$?
11. Дайте определение Г- функции и В- функции.
12. Как связаны $\Gamma(a+1)$ и $\Gamma(a)$?
13. Запишите формулу, которая связывает В- функцию и Г- функции.

Модуль 9. Ряды

Числовые ряды

Пусть задана числовая последовательность (a_n). В десятичной системе счисления конечные суммы $a_1+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ определены однозначно. Попытки определить бесконечную сумму

$$a_m+a_{m+1}+\ldots=\sum_{k=m}^{\infty}a_k \qquad (*)$$

могут привести к разным результатам. Рассмотрим общепринятый метод (определение Коши). Правую и левую часть формулы (*) будем называть *(числовым) рядом*. Для наших целей достаточно считать, что $m=1\,(m=0)$.

Определение 1. Если последовательность частичных сумм (S_n) сходится к числу S, то ряд (*) называется *сходящимся*, а число S называется *суммой* ряда (*). В противном случае, ряд (*) называется *расходящимся*.

Примеры сходящихся рядов

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$	$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$\frac{\sin 1}{\sqrt{1}}+\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}+\frac{\sin 3}{\sqrt{3}}+\frac{\sin 4}{\sqrt{4}}+\frac{\sin 5}{\sqrt{5}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

Пример важного расходящегося ряда (гармонический ряд)

$$\boxed{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}$$

Признак сравнения. Если $\boxed{0\le v_n\le u_n}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ — сходится.

Признак сравнения в предельной форме. Пусть $u_n>0, v_n>0$ $\boxed{u_n \sim v_n,\ n\to\infty}$ тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся одновременно.

Степенной признак сравнения. Пусть $u_n>0$, $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n^{\gamma}}, n\to\infty; \gamma>1}$ тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится.

Признак Даламбера. Пусть $u_n>0$ и $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=d<1}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится. Если $d>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится. Когда $d=1$ признак не дает ответа!!

Признак Коши. Пусть $u_n>0$ и $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k<1}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится. Если $k>1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится. Когда $k=1$ признак не дает ответа!!

Интегральный признак. Пусть функция f непрерывна, <u>неотрицательна</u> и <u>убывает</u> на промежутке $[1,\infty)$. Тогда интеграл $\int_1^{\infty}f(t)dt$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак Лейбница. Если последовательность (u_k) убывает и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд

$$\boxed{u_1-u_2+u_3-\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k}$$

сходится.

Функциональные ряды

Если члены ряда или последовательности зависят от параметра, то говорят о функциональных последовательностях и функциональных рядах. Пусть $(f_k(x)), x\in D$ — функциональная последовательность, а $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), x\in D$ — функциональный ряд.

Определение 2. Если $\forall x\in D_c\subset D \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, то D_c называется *областью сходимости* функциональной последовательности, а функцию $f(x)$ называют *предельной функцией*.

Определение 3. Если $\forall x\in D_c\subset D$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)=u(x)$, то множество D_c называется *областью сходимости* функционального ряда, а функцию $u(x)$ называют *суммой функционального ряда*.

Замечание. Мы уже отмечали тесную связь рядов и последовательностей. Поэтому результаты, которые легко переносятся с последовательностей на ряды и обратно, мы будем формулировать только для последовательностей или рядов.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность $(f_k(x))$ сходится *равномерно* на множестве E к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon>0 \exists n_\varepsilon \forall n>n_\varepsilon \forall x\in E \ \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \ .$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f \ (f_n(x)\rightrightarrows f(x), x\in E)$. *Равномерная сходимость ряда* означает равномерную сходимость последовательности частичных сумм.

Полезное замечание. Есть критерий равномерной сходимости последовательности $(f_k(x))$, а именно, $f_n \rightrightarrows f \ \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0\right)$.

Определение 5. Пусть для всех $x\in E$ и $k\in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|u_k(x)|\le a_k$. Тогда числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *мажорантой на множестве* E для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Хороший достаточный признак равномерной сходимости ряда содержится в следующей теореме.

Теорема 1. (*признак Вейерштрасса*) Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеет на множестве E сходящуюся мажоранту, то он равномерно сходится на множестве E.

Теорема 2. (*непрерывность предельной функции*) Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на $E=[a,b]$ и $f_n(x)\rightrightarrows f(x), x\in E$. Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна на E.

Теорема 3. (*интегрируемость предельной функции*) Если последовательность из непрерывных функций сходится равномерно на $E=[a,b]$, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Замечание. Из этой теоремы сразу получаем, что равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать.

Теорема 4. (*дифференцируемость предельной функции*) Пусть выполняются условия:

1. функции $f_n(x)$ дифференцируемы на $E=[a,b]$,
2. существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=A$ в некоторой точке x_0,
3. $f'_n(x) \rightrightarrows F(x), x\in E$.

Тогда $\forall x\in E$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ и $f'(x)=F(x)$.

Степенные ряды

Определение 6. Функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \qquad (1)$$

называется *степенным рядом*. Числа c_k называются *коэффициентами* степенного ряда. Интервал $x_0-R<x<x_0+R$ называется *интервалом сходимости* ряда (1). Число R будем называть *радиусом сходимости* ряда (1).

Теорема 5. (*Коши --- Адамара*) Рассмотрим последовательность $(k_n)=(\sqrt[n]{|c_n|})$. Справедливы следующие утверждения:

a) если последовательность (k_n) неограниченна, то $R=0$,

b) если $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k = 0$, то $R=\infty$,

c) если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} k_n = k\neq 0$, то $R=1/k$.

Замечание. Иногда бывает удобно воспользоваться другой формулой для радиуса сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

которую получают на основе признака Даламбера для числовых рядов.

Задачи с решениями для модуля № 9

Задача 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Решение

◀ Этот пример проще всего решить с помощью признака Даламбера. Общий член ряда $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Теперь важно правильно выписать $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Осталось вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Итак, ряд сходится. ▶

Задача 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

Решение

◀ Данный пример решим с помощью признака Коши. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} == \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{\ln n} = 0 < 1.$$

Здесь числитель стремится к единице, а знаменатель к бесконечности. Значит, ряд сходится по признаку Коши. ▶

Задача 3. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Решение

◀ В этом примере можно использовать признак сравнения, так как

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln n(\ln\ln n)}} < \frac{1}{e^{2\ln n}} = \frac{1}{n^2}, \quad n > 1700.$$

Известно, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$сходится. Поэтому и наш ряд сходится. ▶

Задача 4. Интегральный признак хорош, но требуется аккуратная проверка условий его применения. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{\infty} \cos x^2 dx$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \cos n^2$. Здесь интеграл сходится по признаку Даламбера. Требуется выяснить сходится ли ряд.

Решение

◀ Допустим, что ряд сходится, тогда общий член ряда должен стремиться к нулю. Итак, пусть

$$\lim_{n\to\infty} \cos n^2 = 0.$$

Тогда подпоследовательность $\cos{(2n)}^2 = \cos 4n^2$ тоже должна стремиться к нулю. Воспользовавшись формулами тригонометрии, получим

$$\cos 4n^2 = 2\cos^2 2n^2 - 1 = 8\cos^4 n^2 - 8\cos^2 n^2 + 1$$

Но в правой части находится последовательность стремящаяся к единице, а в левой части бесконечно малая последовательность. Получили противоречие. Значит исходный ряд расходится. ▶

Задача 5. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k.$$

Решение

◀ Чтобы вычислить радиус сходимости, воспользуемся формулой Коши

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e;\ R=\frac{1}{e}.$$

Значит, интервал сходимости будет $(-R,R)=\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$. Кстати, так как

$$a_k=\exp\left(-k+k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}+o\left(1\right)\right)\nrightarrow 0,\ k\to\infty,$$

то в граничных точках $x=\pm\frac{1}{e}$ степенной ряд расходится. ▶

Контрольные вопросы по модулю № 9:

1. Дайте определение частичной суммы S_5 числового ряда.
2. Пусть частичные суммы $S_n=\sin n,\ n\in\mathbb{N}$, для некоторого ряда. Сходится ли этот ряд?
3. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
4. Сформулируйте достаточное условие расходимости ряда.
5. Запишите признаки сравнения для положительного ряда.
6. Пусть для всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство $0<a_n<b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$?
7. Сформулируйте признак Коши сходимости положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
8. Сформулируйте признак Даламбера сходимости положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.
9. Сформулируйте интегральный признак сходимости положительного ряда.

10. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
11. Пусть $a_n \sim \frac{5}{n\sqrt{n}}$, $n \to \infty$. Будет ли сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?
12. При каких a сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^a}$?
13. Что такое предельная функция функциональной последовательности (ряда)?
14. Сформулируйте критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.
15. Следует ли из равномерной сходимости функциональной последовательности (ряда) поточечная сходимость функциональной последовательности (ряда)?
16. Что такое необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда?
17. Сформулируйте теорему о непрерывности предельной функции функционального ряда.
18. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
19. Дайте определение радиуса сходимости степенного ряда.
20. Что такое интервал сходимости степенного ряда?
21. Запишите формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.

20 ЛЕКЦИЙ

ЛЕКЦИЯ 1

Комплексные числа

Рассмотрим множество всех упорядоченных пар действительных чисел (α,β), где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Если на этом множестве определить рассмотренные ниже арифметические операции, то такую пару действительных чисел называют *комплексным числом* и обозначают символом $z=(\alpha,\beta)$, а множество всех комплексных чисел — символом $\mathbb{C}$.

Точка плоскости может быть задана упорядоченной парой действительных чисел (в стандартном базисе). Значит, геометрической интерпретацией комплексного числа может служить точка плоскости или соответствующий радиус-вектор. Поэтому упорядоченную пару (α,β) можно называть *геометрической формой* комплексного числа *z*. Число α называется *действительной частью*, а β — *мнимой частью* комплексного числа $z=(\alpha,\beta)$. Обозначение: $\operatorname{Re} z=\alpha, \operatorname{Im} z=\beta$. Ось абсцисс будем называть *действительной* осью, а ось ординат *мнимой* осью. *Равенство* комплексных чисел равносильно совпадению соответствующих точек плоскости. Далее мы рассмотрим и другие формы комплексных чисел (алгебраическую, тригонометрическую, показательную). В разных ситуациях будет удобно пользоваться какой-то из перечисленных выше форм комплексных чисел.

Введем обозначение: $i=(0,1)$. Будем называть это число *мнимой единицей*. Действительные числа α отождествляются с парой $(\alpha,0)$. Поэтому можно считать, что действительные числа частный случай комплексных чисел $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$.

Операции сложения, вычитания комплексных чисел, а также умножения на действительное число определяются как соответствующие операции над векторами. Следовательно,

$$(\alpha_1,\beta_1)\pm(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1\pm\alpha_2,\beta_1\pm\beta_2),\gamma(\alpha,\beta)=(\gamma\alpha,\gamma\beta).$$

Но тогда нетрудно заметить, что можно писать

$$z=(\alpha,\beta)=(\alpha,0)+\beta(0,1)=\alpha+i\beta.$$

Итак, мы получили *алгебраическую* форму $\alpha+i\beta$ комплексного числа *z*, которой чаще всего и пользуются.

По определению полагаем

$$i^2=(0,1)(0,1)=-1.$$

Сохранив обычные законы для умножения (коммутативность, дистрибутивность, ассоциативность), определим *умножение* комплексных чисел по правилу

$$z_1z_2=(\alpha_1+i\beta_1)(\alpha_2+i\beta_2)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+i(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2).$$

Деление комплексных чисел определяется как операция, обратная к умножению.

Число $\overline{z}=\alpha-i\beta$ называется *сопряженным* к числу $z=\alpha+i\beta$, а действительное число $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ называется модулем числа $z=\alpha+i\beta$. Отметим, что физики часто используют следующие обозначения: $i\equiv j,\ \overline{z}\equiv z^*$.

Легко устанавливается формула

$$z\overline{z}=|z|^2.$$

Тогда нетрудно заметить, что частное комплексных чисел сводится к умножению действительного числа и двух комплексных по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{z_2\overline{z_2}}z_1\overline{z_2}.$$

Правда, умножать и делить комплексные числа удобнее с помощью *тригонометрической формы* комплексных чисел. Будем называть *аргументом* числа $z=\alpha+i\beta$ угол, который образует соответствующий радиус-вектор с положительным направлением действительной оси (положительным считается направление против часовой стрелки, а по часовой стрелке — отрицательным). Введем обозначения: $\arg z=\varphi\in(-\pi,\pi]$, $\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. *Главным* значением аргумента называют символ $\arg z$. Тогда следующая формула

$$z=|z|\left(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)\right)$$

задает тригонометрическую форму комплексного числа.

Лемма 1. Справедлива формула Муавра $(n=1,2,\ldots)$

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi).$$

◄ Используем метод математической индукции. Если $n=1$, то формула Муавра очевидна. Пусть эта формула справедлива и при $n=k$. То есть

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k=\cos(k\varphi)+i\sin(k\varphi).$$

Умножим обе части этого равенства на $(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{k+1}=\left(\cos(k\varphi)+i\sin(k\varphi)\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=\left(\cos(k\varphi)\cos\varphi)-\sin(k\varphi)\sin\varphi\right)+i\left(\cos(k\varphi)\sin\varphi+\sin(k\varphi)\cos\varphi\right)=$$

$$=\cos((k+1)\varphi)+i\sin((k+1)\varphi)$$

и формула Муавра доказана. ►

С учетом формул тригонометрии и формулы Муавра легко показать, что для произведения, частного и степени комплексных чисел справедливы формулы:

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right);$$

$$z^n=\rho^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right).$$

Операция извлечения корня степени n из числа z определяется как операция, обратная к возведению в степень, то есть число w называется комплексным корнем степени n из числа z, если справедливо равенство $w^n = z$. Отметим, что таких корней будет ровно n, и вычисляются они по формуле

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,\dots,n-1.$$

Здесь $\sqrt[n]{|z|}$ — арифметическое значение корня.

Из геометрического представления комплексных чисел следуют неравенства

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

которые вытекают непосредственно из определений.

Теорема Безу. Если число a является корнем многочлена $P(x)$ $\;P(a)=0\;$ с комплексными коэффициентами, то этот многочлен делится на разность $x-a$.

◀Рассмотрим многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Известна формула суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{q^n - 1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Если в эту формулу подставить $q = \frac{x}{a}$, то получим соотношение

$$x^n - a^n = \; x-a \; \; a^{n-1} + a^{n-2}x + \ldots + x^{n-1} \; .$$

Значит, бином $x^n - a^n$ при любом n делится на $x-a$. Из этого факта следует, что разность

$$P(x) - P(a) = \; x^n - a^n \; + a_{n-1} \; x^{n-1} - a^{n-1} \; + \ldots + a_1 \; x-a$$

делится на $x-a$. Отсюда следует, что многочлен $P(x)$ делится на бином $x-a$, если $P(a)=0$.▶

Основная теорема алгебры. Любой многочлен $P(z) = c_0 + \ldots + c_n z^n$ с комплексными коэффициентами степени $n > 0$ имеет ровно n комплексных корней (с учетом их кратности (см. ЧАВО)). При этом можно получить разложение

$$P(z) = c_n (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Доказательство будет в курсе комплексного анализа.

Упражнение 1. Верно ли равенство

$$\arg \; x + iy \; = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}?$$

***Задачи*:**

1. Пусть $(a+b+c)^n = \sum C_{k,l} a^k b^l c^{n-l-k}$. Найти $C_{k,l}$.
2. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.
3. Расположите следующие числа в порядке возрастания: $\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{2}{1/a+1/b}$. Здесь $a, b > 0$.

ЧАВО

4. *Что больше: единица* (1) *или мнимая единица* (i)*?*

Для мнимых комплексных чисел (*мнимыми* называют числа вида $\alpha, \beta\ = z;\ \beta \ne 0$, а *чисто мнимыми* — $0, \beta\ = z$) не определено понятие больше (меньше). Поэтому этот вопрос не имеет смысла.

5. *Основная теорема алгебры утверждает, что многочлен степени n имеет ровно n корней, но уравнение $x^2-2x+1=0$ имеет только один корень $x=1$.*

Каждый корень в основной теореме алгебры учитывается столько раз, какова его кратность. Кратность корня $x=1$ равна двум, потому что многочлен x^2-2x+1 делится на $(x-1)^2$. Если бы многочлен делился на выражение $(x-1)^3$, а на $(x-1)^4$ не делился, то кратность корня $x=1$ равнялась бы трем и т. д.

6. *Верно ли равенство: $\sqrt{-1}=i$?*

Это равенство не верно! Потому что $\sqrt{-1}$ имеет два комплексных значения: $\left(\sqrt{-1}\right)_0 = i; \left(\sqrt{-1}\right)_1 = -i$.

ЛЕКЦИЯ 2

Важные неравенства

Надеемся, что большинству читателей известно определение абсолютной величины (модуля) действительного числа (обозначение $|x|$). Для остальных напомним основную формулу

$$|x| = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля — расстояние между числом x на действительной прямой и началом отсчета 0.

Справедливы неравенства

$$|a+b| \le |a|+|b|,\ \ |a-b| \ge ||a|-|b||.$$

◄ Первое неравенство вытекает из цепочки утверждений:

$$ab \le |ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2 \Leftrightarrow |a+b| \le |a|+|b|.$$

Второе неравенство следует из первого, если заметить, что

$$|(a-b)+b| < |a-b|+|b|.\ ►$$

Замечание 1. По индукции легко получить неравенство

$$|a_1+\ldots+a_n|\le|a_1|+\ldots+|a_n|.$$

Замечание 2. Полезно (для дальнейшего) запомнить, что неравенство $|x|<a$ равносильно двойному неравенству $-a<x<a$, а неравенство $|x|>a$ равносильно двум неравенствам $x>a$ и $x<-a$.

Рассмотрим неравенство, которое называют *неравенством Бернулли*. Оно имеет вид

$$(1+x)^n \ge 1+nx \ (n\in\mathbb{N},\ x>-1). \qquad (1)$$

◀ Доказательство этого неравенства проводится по индукции. Продемонстрируем последний шаг индукции:

$$(1+x)^n \ge (1+nx) \Rightarrow (1+x)^{n+1} \ge (1+nx)(1+x) \ge 1+(n+1)x \ ▶$$

Второе важное неравенство называется *неравенством Коши* (среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического):

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\ x_i>0. \qquad (2)$$

Его доказательство несколько сложнее предыдущего. Вначале установим лемму.

Лемма 1. Если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение тем больше, чем меньше расстояние между ними. Произведение достигает максимума, когда эти числа совпадают.

◀ Введем обозначение для суммы двух чисел: $S=x+\tilde{x},\ x>0,\ \tilde{x}>0$. Пусть $P=x\tilde{x}$. Тогда $P=x(S-x)$. Так как абсцисса вершины параболы $y=x(S-x)$ равна $S/2$, то отсюда и следует требуемое (x и $\tilde{x}$ расположены симметрично относительно $S/2$, поэтому, чем ближе они друг к другу, тем больше ордината параболы). ▶

Лемма 2. Пусть $x_i>0, i=1,\ldots,n$ и их сумма $S=x_1+\ldots+x_n$ постоянна. Тогда произведение $P=x_1\cdot\ldots\cdot x_n$ будет максимальным, когда все $x_i=S/n$.

◀ Либо все $x_i=S/n$, либо найдутся два числа, таких, что справедливы неравенства: $x_1<S/n, x_2>S/n$. Между этими числами находится их среднее арифметическое и число S/n. Начнем сближать числа x_1,x_2, сохраняя постоянной их сумму. По лемме 1 произведение будет расти. Наступит момент, когда одно из чисел (то, к которому S/n ближе) совпадет с числом S/n. Теперь у нас одно из чисел равно S/n, общая сумма не изменилась, а произведение увеличилось. Можно продолжать этот процесс для остальных чисел, которые не равны S/n. За конечное число шагов получим максимальное произведение, в котором все множители равны S/n. ▶

Теорема 1. Для n положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ справедливо неравенство (2).

◀ Пусть $S=x_1+\ldots+x_n$. Тогда по лемме 2 справедливо неравенство

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_n \le \frac{S^n}{n^n}.$$

То есть

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{S}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

►

Теорема 2 (*Коши — Буняковского*). Для $n \in \mathbb{N}$ и чисел $a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

◄ Доказательство следует из неравенства

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - \lambda b_k\right)^2 = A - 2\lambda B + \lambda^2 C = M(\lambda),$$

где $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2; C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2; B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. При наших условиях дискриминант $d = B^2 - AC$ многочлена $M(\lambda)$ должен быть числом отрицательным или нулем, что и дает нужное неравенство. ►

Замечание 3. Другое доказательство можно получить, если убедиться в справедливости тождества

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

Числовые последовательности

Определение 1. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbf{R}$ называется *числовой последовательностью* (последовательностью). Пусть $f(n) = x_n$ — *n-й член последовательности*. Для последовательности используют обозначения: 1) $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; 2) $\{x_n\}$; 3) (x_n).

Пример 1. Рассмотрим несколько примеров последовательностей.

1. Последовательность $x_n = a$, все члены которой совпадают друг с другом (постоянная последовательность).
2. Знакочередующаяся последовательность $x_n = (-1)^n$.
3. Последовательность можно задавать рекуррентно, когда каждый член последовательности, кроме нескольких первых, выражается с помощью предыдущих. Зададим, например, *последовательность Фибоначчи*: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Последовательность α_n будем называть *бесконечно малой*, если $\forall \varepsilon > 0$ только конечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| \ge \varepsilon$. С помощью кванторов это определение записывается так: $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall n > r (|\alpha_n| < \varepsilon)$.

Определение 3. Последовательность β_n будем называть *бесконечно большой*, если $\forall\varepsilon>0$ только конечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|\beta_n|\le\varepsilon$. Равносильным будет утверждение: $\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r(|\beta_n|>\varepsilon)$.

Замечание 4. Пусть M — некоторое положительное число. Так как ε это любое положительное число, то и $M\varepsilon$ будет любым положительным числом. Поэтому замена в неравенствах ε на $M\varepsilon$ (например, в определении бесконечно малой: $\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r(|\alpha_n|<M\varepsilon)$) приводит к равносильным определениям. Это замечание часто будет использоваться в дальнейшем.

Определение 4. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если найдется число $M>0$, что $\forall n(|x_n|\le M)$.

Лемма 3. Бесконечно малая последовательность (x_n) ограничена.

◄ Пусть $\varepsilon=1$. Тогда найдется натуральное число n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n|\le 1$. Полагая $M=1+\sum_{k=1}^{n_0}|x_k|$, получим при любом $n\in\mathbb{N}$ неравенство $|x_n|\le M$. Итак, лемма доказана. ►

Лемма 4. Пусть (α_n) — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n\ne 0$. Тогда $\beta_n=1/\alpha_n$ является бесконечно большой последовательностью. Если (β_n), $\beta_n\ne 0$ — бесконечно большая последовательность, то $\alpha_n=1/\beta_n$ будет бесконечно малой последовательностью.

◄ Так как $|\alpha_n|\le\varepsilon\Leftrightarrow|\beta_n|\ge 1/\varepsilon=\varepsilon_1$, то отсюда и получаем требуемое.►

Замечание 5. Под суммой и произведением последовательностей (x_n) и (y_n) мы понимаем соответственно последовательности (x_n+y_n) и (x_ny_n). Будем иногда писать бесконечно малая, подразумевая — бесконечно малая последовательность.

Лемма 5. Конечная сумма бесконечно малых является бесконечно малой.

◄ Доказательство следует из определения и замечания 4.►

Лемма 6. Произведение бесконечно малой (α_n) на ограниченную последовательность (x_n) является бесконечно малой.

◄ Требуемое утверждение получим из неравенства $|\alpha_nx_n|<M\varepsilon$ и замечания 2.►

Следствие 1. Произведение конечного множества бесконечно малых является бесконечно малой. Этот факт следует из леммы 3 и леммы 6.

Пример 2. Последовательность $x_n=q^n,|q|<1$, является бесконечно малой.

◄ Заметим, что для доказательства нам нужно было найти число *r*, которое фигурирует в определении 2. Можно считать, что $q>0$. Тогда $q=1/(1+h),h>0$. Используя неравенство Бернулли (1), получим

$$q^n=\frac{1}{(1+h)^n}\le\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}.$$

Теперь, когда $n > r = \dfrac{1}{\varepsilon h}$, получим требуемое неравенство $q^n < \varepsilon$. ►

Пример 3. Последовательность $y_n = 1/n^k$, $k = 1, 2, \dots$ является бесконечно малой.

◄ Доказательство простое. Прежде всего отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, так как $n > r = \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Далее останется применить следствие 1. ►

Упражнение 1. Напишите определение неограниченной последовательности (в позитивном смысле).

Упражнение 2. Напишите определение последовательности, которая не является бесконечно малой (в позитивном смысле).

***Задачи*:**

1) $\sqrt{i} = ?$;
2) записать в тригонометрической форме $z = \sqrt{3} - i$;
3) изобразить $1 < |z + i| < 2$;
4) решить уравнение $z^2 + \overline{z} = 0$;
5) решить уравнение $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$.

ЧАВО

1. *Какая разница между неограниченной последовательностью и бесконечно большой последовательностью?*

Последовательность $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ является неограниченной, но не бесконечно большой. Все бесконечно большие последовательности являются неограниченными.

2. *Бесконечно большая величина — это то, что больше любого числа?*

Бесконечно большая величина является функцией. Ее **значения** действительно могут быть сколь угодно большими (по модулю).

3. *Какой геометрический смысл неравенства Коши — Буняковского?*

Абсолютная величина скалярного произведения двух векторов в n-мерном пространстве не превосходит произведения длин этих векторов.

7. *Есть ли еще какие-то средние значения нескольких чисел, кроме среднего арифметического и среднего геометрического?*

Есть и другие средние значения. Например, среднее гармоническое:

$$\overline{x} = \left(\frac{1/x_1 + \dots + 1/x_n}{n} \right)^{-1}.$$

ЛЕКЦИЯ 3

Сходящиеся последовательности

Определение 1. Последовательность (x_n) называется *сходящейся* (*сходится*), если найдется число a, такое, что последовательность $(x_n - a) = (\alpha_n)$ является бесконечно малой. При этом будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читается: предел последовательности «икс эн» при «эн», стремящемся к бесконечности, равен «а») или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (читается: последовательность «икс эн» стремится к «а» при «эн», стремящемся к бесконечности) и говорить, что последовательность (x_n) *имеет предел*, равный a. Если найти такого числа a нельзя, то говорят, что последовательность *расходится*. Вместо фразы «имеет предел» часто говорят «существует предел».

Замечание 1. Впервые символ $\lim$ для обозначения предела ввел швейцарский математик Симон Люилье в сочинении «Элементарное изложение высшего анализа» (1786 г.).

Замечание 2. Рассмотрим последовательность сумм

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3, \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots$$

из элементов (x_n). Если такая последовательность сумм сходится, то говорят, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится*, в противном случае говорят, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *расходится*.

Определение 2. Любой интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью* точки a. Пусть $\varepsilon > 0$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ будем называть ε-*окрестностью* точки a и обозначать $U_\varepsilon(a)$.

Замечание 3. Можно определение 1 записать с помощью кванторов

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists r \forall n > r (| x_n - a | < \varepsilon)).$$

Здесь r является действительным числом, а n — натуральным.

Замечание 4. Бесконечно малая последовательность сходится и ее предел равен нулю.

Определение 3. Окрестность точки a называется *ловушкой* последовательности, если все члены последовательности, начиная с некоторого номера, попадают в эту окрестность. Окрестность точки a называется *кормушкой* последовательности, если бесконечное множество членов последовательности принадлежат этой окрестности. Точка a называется *предельной точкой* последовательности, если любая ε-окрестность точки a является кормушкой последовательности.

Упражнение 1. Подумайте, как дать определение предела последовательности, пользуясь словом «ловушка».

Замечание 5. Последовательность является расходящейся, если для каждого числа найдется его окрестность, которая не является ловушкой для этой последовательности.

Пример 1. Покажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

◀ При любом a окрестность $U_{1/2}(a) = (-1/2 + a, 1/2 + a)$ не является ловушкой для этой последовательности, потому что в нее не попадают члены последовательности либо с четными, либо с нечетными номерами.▶

Замечание 7. Если последовательность бесконечно большая, то будем писать $x_n \to \infty$. При этом когда все члены последовательности положительные, начиная с некоторого номера, то пишут $x_n \to +\infty$. Аналогично, если отрицательные, начиная с некоторого номера, то пишут $x_n \to -\infty$.

Лемма 1. Справедливы два утверждения:

a) $\begin{cases} x_n \to a, \\ \bar{a} > a. \end{cases} \Rightarrow \exists r_{\bar{a}} \forall n > r_{\bar{a}} \ \ x_n < \bar{a}$;

b) $\begin{cases} x_n \to a, \\ \underline{a} < a. \end{cases} \Rightarrow \exists r_{\underline{a}} \forall n > r_{\underline{a}} \ \ x_n > \underline{a}$.

◀ Первое утверждение получим из определения, если возьмем $\varepsilon = \bar{a} - a$, а второе при $\varepsilon = a - \underline{a}$.▶

Замечание 8. Суть леммы в том, что когда некоторое число больше (меньше) предела, то все члены последовательности, начиная с некоторого номера, соответственно меньше (больше) этого числа.

Следствие 1. $\begin{cases} x_n \to a, \\ a \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \exists r_0 \forall n > r_0 \ \ |x_n| > |a|/2$.

Следствие 2. Если постоянная последовательность $a, a, \ldots$ является бесконечно малой, то $a = 0$.

◀ Если предположить, что $a \neq 0$, то при $\varepsilon = |a|/2$ получим противоречие с определением бесконечно малой последовательности.▶

Следствие 3. Если некоторая последовательность (x_n) такова, что $\exists a \exists n_0 \forall n > n_0 \ \ x_n = a$, то такую последовательность называют *стационарной*. Эта стационарная последовательность сходится и ее предел равен a.

Лемма 2. Последовательность может иметь не более одного предела.

◀ $\begin{cases} x_n - a = \alpha_n, \\ x_n - a' = \alpha'_n \end{cases} \Rightarrow \alpha_n - \alpha'_n = a - a' \Rightarrow a - a' = 0.$ По следствию 2.▶

Лемма 3. Сходящаяся последовательность (x_n) ограничена.

◀ Следует из ограниченности бесконечно малой последовательности $(x_n - a) = (\alpha_n)$ (лекция 2, лемма 3). ▶

Лемма 4. Над сходящимися последовательностями можно производить арифметические операции, то есть верны утверждения:

$$\begin{cases} x_n \to a, \\ y_n \to b. \end{cases} \Rightarrow x_n \pm y_n \to a \pm b \ ;$$

$$\begin{cases} x_n \to a, \\ y_n \to b. \end{cases} \Rightarrow x_n y_n \to ab \ ;$$

$$\begin{cases} x_n \to a, \\ y_n \to b, y_n \ne 0, b \ne 0. \end{cases} \Rightarrow \ x_n/y_n \ \to \ a/b \ .$$

◀ Докажем последнее утверждение.

$$x_n/y_n - a/b = \ \alpha_n + a \ / \ \beta_n + b \ - a/b = \ b\alpha_n - a\beta_n \ /by_n = A_n.$$

В силу следствия 1 получим, что $1/|y_n| < 2/|b|$ начиная с некоторого номера. Итак, выражение A_n является произведением ограниченной последовательности $1/y_n$ на бесконечно малую последовательность $\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b}$. Тогда $x_n/y_n \ \to \ a/b$.▶

Упражнение 2. Может ли сумма сходящейся и расходящейся последовательности сходиться?

Упражнение 3. Может ли произведение сходящейся и расходящейся последовательности сходиться?

Упражнение 4. Докажите утверждение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a.$$

Верно ли обратное утверждение?

Упражнение 5. Пусть любая окрестность точки a является кормушкой последовательности. Следует ли отсюда хотя бы одно из утверждений:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; 2) x_n — ограниченная последовательность.

Упражнение 6. Найдите ошибку в следующем рассуждении. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right) = 0.$$

Кроме того, отыщите правильный ответ.

***Задачи*:** а) 21, 42, 43, 44, 45, 96, 126, 127, 128, 129, 130; б) докажите, что каждый пятый член последовательности Фибоначчи (см. пример 1 лекции 2) делится на 5.

ЧАВО

1. *Как с помощью* ε, δ *дать определение расходящейся последовательности* x_n*?*

Надо каждый квантор заменить дополнительным $\forall \leftrightarrow \exists$ и взять отрицание утверждения. Получим следующее определение расходящейся последовательности: $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall r > 0 \exists n > r (| x_n - a | \ge \varepsilon)$.

2. *Какая разница между понятиями «предел» и «предельная» точка?*

Множество предельных точек последовательности может быть даже бесконечным (лекция 6). Если предел последовательности существует, то он является единственной предельной точкой.

ЛЕКЦИЯ 4

Предельный переход в неравенствах

Здесь мы рассмотрим две теоремы о том, что нестрогие неравенства сохраняются при переходе к пределу. Отметим, что строгие неравенства являются частным случаем нестрогих неравенств.

Теорема 1. Пусть $x_n \to a, y_n \to b$ и $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n \le y_n$, тогда $a \le b$.

◀ Применим «противный» метод. Пусть $a > b$. Тогда при $\varepsilon = (a-b)/2 > 0$ будем иметь для $n > n_0$ два неравенства: $x_n > a - \varepsilon = (a+b)/2, y_n < b + \varepsilon = (a+b)/2$. Этот факт следует из лекции 3 (лемма 1), но тогда $x_n > y_n$ для $n > n_0$. Получили противоречие с условиями теоремы. ▶

Упражнение 1. Приведите пример двух последовательностей x_n и y_n , чтобы $\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n < y_n)$, но $\lim x_n = \lim y_n$.

Теорема 2 (*о двух дружинниках*). Пусть $x_n \to a, y_n \to a$ и $x_n \le u_n \le y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $u_n \to a$.

◀ Для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a - \varepsilon < x_n \le u_n \le y_n < a + \varepsilon$. Тогда $|u_n - a| < \varepsilon$ при достаточно больших значениях n. ▶

Замечание 1. В теоремах 1 и 2 достаточно проверять неравенства из условий теорем только для $n > n_0 \ge 1$. В теореме 2 x_n, y_n — «дружинники», a — «участок», а u_n — «преступник».

Пример 1. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

◀Очевидно, что достаточно рассмотреть $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $a = c + 1,\ c > 0$. Тогда из формулы бинома Ньютона получим

$$a^n = (1+c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

Откуда следует неравенство $0 \le \dfrac{n}{a^n} \le \dfrac{M}{n-1}$, где $M = \dfrac{2}{(a-1)^2}$.

Тогда по теореме 2 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0.$ Теперь надо только заметить, что

$\dfrac{n^k}{a^n} = \left(\dfrac{n}{b^n}\right)^k,\ 1 < b = a^{1/k},\ k > 0.$ Откуда и вытекает формула (1).▶

Определение 1. Каждое из следующих обозначений:

$$\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};0\cdot\infty;\infty-\infty;1^{\infty};0^{0};\infty^{0}$$

(где ∞ — условное обозначение бесконечно большой, а 0 — условное обозначение бесконечно малой) будем называть *неопределенностью*. При этом под символом $\frac{\infty}{\infty}$ понимаем отношение двух бесконечно больших, символ 1^{∞} означает, что основание степени стремится к единице, а показатель к бесконечности, и т. п.

Монотонные последовательности. Вложенные отрезки. Грани

Напомним следующее определение.

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *невозрастающей* (*убывающей*), если выполняются неравенства $x_{n+1}\le x_n$ $(x_{n+1}<x_n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Последовательность (x_n) называется *неубывающей* (*возрастающей*), если выполняются неравенства $x_{n+1}\ge x_n$ $(x_{n+1}>x_n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Все перечисленные последовательности называют еще *монотонными*.

Теорема 3. Пусть последовательность x_k неубывающая и ограничена сверху, тогда эта последовательность сходится. Пусть последовательность x_k невозрастающая и ограничена снизу, тогда эта последовательность сходится.

◄ Достаточно доказать только первое утверждение. Потому что когда последовательность x_k невозрастающая и ограничена снизу, то последовательность $-x_k$ — неубывающая и ограничена сверху.

Когда $\forall k\ \ x_k>0$, то это утверждение уже доказано (лемма 1 и замечание 9 из введения в анализ). При наших предположениях последовательность с общим членом $y_k=x_k+|x_1|+1$ является возрастающей и положительной. Значит, последовательность y_k сходится. Тогда последовательность x_k также сходится, так как $x_k-y_k=const$.►

Замечание 2. Предыдущая теорема верна, когда последовательность неубывающая (невозрастающая), начиная с некоторого номера.

Теорема 4 (*о вложенных отрезках*). Пусть имеется последовательность **вложенных** отрезков

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots.$$

Тогда найдется точка, принадлежащая всем отрезкам.

◄Так как последовательность a_n неубывающая и ограничена сверху $a_n<b_1$, то $\exists\lim a_n=a$. Последовательность b_n является невозрастающей и ограниченной снизу $b_n>a_1$, поэтому $\exists\lim b_n=b$. При этом $a\le b$ (теорема 1). Тогда любая точка $c\in[a,b]$ удовлетворяет условиям леммы.►

Следствие 1. Если справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, то последовательность отрезков из леммы будем называть *стягивающейся*. В этом случае общая точка всех отрезков $c = a = b$ будет единственной.

Пусть $X \subset \mathbf{R}$ — числовое множество, а $x \in X$ его элемент.

Определение 3. Число m называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) множества X, если для всех x из множества X выполняется неравенство $x \le m$ $x \ge m$. При этом множество X называется ограниченным сверху (снизу). С помощью кванторов это утверждение для ограниченного сверху множества можно записать следующим образом: $\exists m \in \square\ \forall x \in X (x \le m)$.

Определение 4. Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

Определение 5. Наименьшая из верхних граней называется *точной верхней гранью.* Наибольшая из нижних граней называется *точной нижней гранью.* При этом точную верхнюю грань множества X обозначим символом $\sup X$ (читается как «супремум»), а точную нижнюю грань — символом $\inf X$ (читается как «инфимум»).

Замечание 3. Если $\sup X \in X$, то точную верхнюю грань обычно называют *максимальным* значением (элементом) множества X. Когда $\inf X \in X$, то аналогично точную нижнюю грань называют *минимальным* значением (элементом) множества X. Пример интервала $X = (a, b)$ показывает, что точные грани могут и не принадлежать множеству.

Замечание 4. Если множество не является ограниченным сверху, то полагают $\sup X = \infty$. Аналогично $\inf X = -\infty$, если множество не является ограниченным снизу.

Замечание 5 (критерий точной грани). Справедливы два утверждения:

1. Число $\overline{x}$ является точной верхней гранью множества X тогда и только тогда, когда $(\forall x \in X (x \le \overline{x})) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X (x > \overline{x} - \varepsilon))$.
2. Число $\underline{x}$ является точной нижней гранью множества X тогда и только тогда, когда $(\forall x \in X (x \ge \underline{x})) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X (x < \underline{x} + \varepsilon))$.

Теорема 5. Любое ограниченное числовое множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани.

◄ Пусть множество X ограничено сверху числом m. Рассмотрим отрезок $a,m \equiv [a_1, b_1]$, который содержит хотя бы одну точку из множества X. Делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Обозначим $[a_2, b_2]$ правую половину отрезка, если она содержит точку из множества X. В противном случае $[a_2, b_2]$ — левый отрезок. Делим опять отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и обозначаем $[a_3, b_3]$ правый отрезок, если он содержит точку из множества X (иначе $[a_3, b_3]$ — левый отрезок). Продолжая процесс деления новых отрезков далее, получим последовательность стягивающихся отрезков:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots.$$

По следствию 1 из теоремы 4 есть точка *c*, принадлежащая всем отрезкам. Заметим, что по построению правее любого отрезка $[a_n, b_n]$ нет точек из множества *X*. Следовательно, точка *c* является верхней гранью множества *X* (иначе нашлась бы точка из множества *X*, которая находилась бы правее некоторого отрезка $[a_n, b_n]$). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется отрезок $[a_n, b_n]$, который лежит правее точки $c - \varepsilon$. Значит, найдется точка $x_n \in X$, что справедливо неравенство $c - \varepsilon < x_n \le c$. По замечанию 5 точка *c* является точной верхней гранью множества *X*. Если множество *X* ограничено снизу, то надо рассмотреть множество $Y = \ -x\ $. Это множество *Y* будет ограничено сверху и $\sup Y = -\inf X$.►

Упражнение 2. Пусть $X \pm Y = \ x \pm y \big| \forall x \in X, \forall y \in Y\ $. Верны ли равенства:

$$\sup\ X + Y\ = \sup X + \sup Y; \ \sup\ X - Y\ = \sup X - \sup Y\,?$$

Теорема 6. Справедливы два утверждения.

1. Пусть последовательность (x_n) является неубывающей и ограниченной сверху. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n \{x_n\} = a.$$

2. Пусть последовательность (x_n) является невозрастающей и ограниченной снизу. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n \{x_n\} = b.$$

◄ Докажем первое утверждение. Пусть $a = \sup\{x_n\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists x_{n_\varepsilon} (x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon)$. Из условия, что последовательность неубывающая, уже для всех $n > n_\varepsilon$ имеем неравенство $x_n > a - \varepsilon$. Кроме того, $a = \sup\{x_n\} \Rightarrow x_n \le a < a + \varepsilon$. Итак, $\forall n > n_\varepsilon (| x_n - a | < \varepsilon)$. Первое утверждение доказано. Второе утверждение получим из первого заменой $x_n = -y_n$. При этом легко видеть, что $\inf\{x_n\} = -\sup\{y_n\}$. ►

Пример 2. Рассмотрим итерационную формулу, позволяющую вычислять корень квадратный из положительного числа. Эту формулу называют еще формулой Герона. Возьмем некоторое число $x_1 > 0$ (начальное приближение) и пусть

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right). \qquad (2)$$

Так как

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} x_n + \frac{a}{2x_n} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \ge 0,$$

то последовательность (x_n) ограничена снизу $\ x_n \ge \sqrt{a},\ n = 2, 3, \ldots\ $. Кроме того, эта последовательность убывает (при $n > 1$), ибо

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\frac{a - x_n^2}{x_n} \le 0.$$

Итак, последовательность (x_n) сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = p$. Теперь можно перейти к пределу в равенстве (2). Получим квадратное уравнение

$$p = \frac{p}{2} + \frac{a}{2p}.$$

Решая это уравнение, находим

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

***Задачи*:** 46, 49, 51, 52, 56, 67.

ЧАВО

1. *Пусть* $x_n \to a, y_n \to b$ *и* $x_n < y_n; \forall n \in \mathbb{N}$*, верно ли тогда, что* $a < b$*?*

В этом случае можно только утверждать, что $a \le b$. Рассмотрите две последовательности $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}$.

2. *Является ли неопределенностью* $\frac{0}{\infty}$ *и* $\frac{\infty}{0}$*?*

Нет. В первом случае у нас будет бесконечно малая величина, а во втором бесконечно большая величина.

3. *В некоторых учебниках встречается термин «строго возрастающая последовательность». Что это значит?*

В подобных учебниках должна быть пара терминов: возрастающая последовательность, строго возрастающая последовательность. Ей соответствует пара наших понятий: неубывающая последовательность, возрастающая последовательность. При этом не надо путать термины: неубывающая последовательность и не убывающая последовательность.

4. *Приведите примеры последовательности вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.*

Последовательность отрезков $\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}$ является последовательностью стягивающихся отрезков. Эта последовательность стягивается к точке 0. Последовательность отрезков $\left\{\left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]\right\}$ является последовательностью вложенных отрезков. Любая точка между 0 и 1 принадлежит всем отрезкам.

5. *Какая разница между точной верхней гранью и максимальным значением?*

Если у числового множества есть максимальное значение (максимум), то точная верхняя грань и максимальное значение совпадают. Интервал (0,1) не имеет максимального значения, но точная верхняя грань у этого множества есть и она равна 1.

6. *Я беру последовательность стягивающихся интервалов* $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\supset(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\ldots\supset(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\supset\ldots$ *Оказывается, что у этих интервалов тоже есть общая точка* 0. *Почему же нет леммы о вложенных интервалах.*

Лемма о вложенных интервалах будет верна не всегда. Рассмотрите последовательность $(0,\frac{1}{2})\supset(0,\frac{1}{3})\ldots\supset(0,\frac{1}{n})\supset\ldots$

7. *В некоторых учебниках есть термин — точная верхняя граница. Что это такое?*

Можно записать тождество: точная верхняя грань ≡ точная верхняя граница.

ЛЕКЦИЯ 5

Важные пределы

Мы считаем, что каждый образованный человек должен знать следующие пределы последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q|<1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0, \alpha>0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0, |a|>1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

◀ Доказательство первых трех пределов можно найти в лекциях 2 и 4. Чтобы обосновать последний предел, достаточно рассмотреть случай $a>0$. Так как

$$x_n=\frac{a}{n}x_{n-1}, \qquad (*)$$

то, начиная с номера $n>a$, последовательность убывает и ограничена снизу нулем. Останется перейти к пределу в равенстве (*). ▶

Замечание 1. При нахождении предела последовательности $x_n=\dfrac{a^n}{n!}$ мы предварительно воспользовались теоремой о сходимости монотонной последовательности. А почему бы ни применить более простой «метод»? Допустим, что искомый предел равен x $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Переходим в соотношении $x_n=\dfrac{a}{n}x_{n-1}$ к пределу. Получим равенство $x=x\cdot 0$, то есть $x=0$. Без доказательства существования предела этот «метод» может привести к неправильному результату. Мы знаем (лекция 3), что последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела. Если в равенстве $x_n=(-1)x_{n-1}$ перейти к пределу, то получим соотношение $x=-x$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} -1^{\ n} = 0$?!

Рассмотрим еще три важных предела

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n}=0.$$

◀ Чтобы доказать первый предел, воспользуемся неравенством Коши из лекции 2. Пусть $x_1=\sqrt{n},\ x_2=\sqrt{n},\ x_3=1,\ldots,x_n=1$. Тогда

$$\frac{n+2\sqrt{n}-2}{n} \ge \sqrt[n]{n} \ge 1 \Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \ge \sqrt[n]{n} \ge 1.$$

Теперь из теоремы о двух дружинниках получим требуемое. Для доказательства второго предела можно воспользоваться неравенством $\sqrt[n]{n} \ge \sqrt[n]{a} \ge 1$ при $n > a > 1$. Третий предел обоснуем по определению. Пусть $\varepsilon > 0$, $\bar{a} = 2^{\varepsilon} > 1$. Тогда по лемме 1 лекции 3 получим, что, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\sqrt[n]{n} < \bar{a}$. Но тогда $0 < \frac{\log_2 n}{n} < \varepsilon$. Осталось вспомнить определение предела.►

Число *e*

Рассмотрим две последовательности: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Оказывается, обе последовательности монотонны.

Покажем, что последовательность (a_n) возрастает. Из неравенства Коши (лекция 2), когда $x_1 = 1+1/n, x_2 = 1+1/n, \ldots, x_n = 1+1/n, x_{n+1} = 1$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Докажем, что последовательность (b_n) убывает. В неравенстве Коши полагаем $x_1 = 1-1/n, x_2 = 1-1/n, \ldots, x_n = 1-1/n, x_{n+1} = 1$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \le \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Значит, последовательность (b_n) убывает.

Теперь легко получить для всех n два неравенства: $a_n < b_n \le b_1$ и $b_n > a_n \ge a_1$. Тогда из лекции 4 (теорема 3) вытекает существование двух пределов: $\lim a_n$, $\lim b_n$. Более того, из равенства $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$ следует, что эти пределы равны.

Определение 1. Обозначим символом e общий предел этих последовательностей:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (1)$$

Замечание 2. Поскольку

$$\forall n \in N \quad a_n < e < b_n ,$$

то число e может быть вычислено с любой точностью $e \approx 2{,}71828\ldots$. Чтобы получить m знаков после запятой числа e, надо брать $n = 10^{m+1}$, так как

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \frac{3}{n}.$$

Число e является одним из самых известных чисел математики.

Упражнение 1. Доказать, что

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\right). \qquad (2)$$

Поэтому говорят, что число e является суммой следующего ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \equiv \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots; \quad 0!=1 .$$

Кстати, из формулы (2) получается более удобный способ приближенного вычисления числа e.

Определение 2. Функцию $f(x)=e^x \equiv \exp x$ называют *экспонентой*. Часто встречаются функции: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус.

Упражнение 2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

***Задачи*:** 47, 59, 77, 78, 81, 90, 148.

ЧАВО

1. *Можно ли задать число* π *с помощью ряда?*

Можно. Например, $\pi = 4-4/3+4/5-4/7+4/9-\ldots$ Отметим только, что для вычисления числа π удобнее пользоваться другими методами. Запомните хорошее практическое приближение $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

ЛЕКЦИЯ 6

Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности

Рассмотрим некоторую возрастающую последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$.

Определение 1. Пусть (x_n) — заданная последовательность. Тогда последовательность (y_n), определенная следующим образом: $y_n = x_{k_n}$, называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n).

Определение 2. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$, то число a называется *частичным пределом* (предельной точкой) последовательности (x_n).

Частичных пределов у последовательности может быть достаточно много.

Упражнение 1. Приведите пример последовательности, у которой частичным пределом является любое заданное действительное число. Подсказка — рассмотрите последовательность из ВСЕХ рациональных чисел.

Для нас наибольший интерес будут представлять два частичных предела: наибольший и наименьший.

Определение 3. Пусть последовательность (x_n) ограничена. Тогда наибольший из частичных пределов последовательности (x_n) называется *верхним пределом* и обозначается символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Наименьший из частичных пределов последовательности (x_n) называется *нижним пределом* и обозначается символом $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Если последовательность неограниченна сверху, то будем писать $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \infty$. Когда последовательность неограниченна снизу, то пишут $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Лемма 1. Верхний и нижний пределы (конечные и бесконечные) всегда существуют и справедливы равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right); \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right). \quad (1)$$

◀ Можно рассматривать только ограниченные последовательности. Так как $\sup\limits_{k\geq n} -x_k = -\inf\limits_{k\geq n} x_k$, то достаточно обосновать первое равенство в (1). Рассмотрим последовательность $\sup\limits_{k\geq n} x_k = s_n$. Эта последовательность невозрастающая (точная верхняя грань множества не меньше точной верхней грани подмножества). Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geq n} x_k\right) = s$. Докажем, что есть подпоследовательность, которая имеет предел равный s, и нет подпоследовательности с большим пределом.

Из определения s_n вытекает, что $\exists k_n \left(x_{k_n} \in \left(s_n - \frac{1}{n}, s_n \right] \right)$, причем $k_{n+1} > k_n$. Тогда подпоследовательность $x_{k_n} \to s$ является искомой.

Покажем теперь, что нет последовательности с большим, чем s, пределом. Предположим, что существует такая подпоследовательность $x_{p_n} \to \overline{s} = s + \varepsilon > s$. Тогда найдется $s_m < s + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, начиная с некоторого номера N, для всех $n > N$ справедливо неравенство $x_{p_n} < s + \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, $s + \varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} \leq s + \frac{\varepsilon}{2}$. Получили противоречие с предположением. Лемма доказана.▶

Упражнение 2. Приведите пример последовательности, для которой $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Замечание 1. Два свойства полностью характеризуют верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$ (в чем легко убедиться «противным» методом):

а) $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall n > r\ (x_n < a + \varepsilon)$;

б) найдется подпоследовательность x_{k_n}, которая стремится к a.

Аналогичное утверждение справедливо и для нижнего предела. Надо только в пункте а) писать $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall n > r \quad x_n > a - \varepsilon$.

Замечание 2. Из замечания 1 следует, что необходимым и достаточным условием существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является совпадение верхнего и нижнего пределов этой последовательности.

Упражнение 3. Верно ли равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n + y_n\ = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n\ + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$.

Упражнение 4. Докажите, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ не существует. (<u>Указание</u>. Если бы этот предел существовал, то такой же предел имели бы последовательности: $\sin 2n$; $\sin\ n+1$; $\sin\ n+2$; …).

Упражнение 5. Докажите, что из любой последовательности x_k можно выделить монотонную подпоследовательность.

Теорема Больцано — Вейерштрасса

Теорема 1 (*Больцано — Вейерштрасс*). Если последовательность (x_n) ограничена, то она имеет сходящуюся подпоследовательность.

◀Так как последовательность ограничена, то для всех n справедливо неравенство $a_1 \le x_n \le b_1$. Делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту половину, которая содержит бесконечное множество членов нашей последовательности x_n . Делим опять отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и обозначаем $[a_3, b_3]$ отрезок, содержащий бесконечное множество членов последовательности x_n . Продолжая процесс деления новых отрезков далее, получим последовательность стягивающихся отрезков:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots.$$

По следствию из теоремы 4 лекции 4 найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам. В силу построения отрезков (каждый из них содержит бесконечное множество членов нашей последовательности x_n), можно выбрать подпоследовательность $x_{k_n} \in [a_n, b_n], k_{n+1} > k_n$. Так как $\left|x_{k_n} - c\right| \le |b_n - a_n| \to 0$, то искомая подпоследовательность построена.▶

Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности

Оказывается, установить сходимость последовательности можно, не зная чему равен предел.

Определение 4. Будем называть последовательность x_n *фундаментальной,* если

$$\forall\varepsilon>0\exists r\forall n>r\forall m>r\ \left|x_n-x_m\right|<\varepsilon\ .$$

Теорема 2 (*Больцано — Коши*). Последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

◀Пусть последовательность x_n сходится к a. Тогда $\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r\forall p\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases}\left|x_n-a\right|<\varepsilon/2,\\ \left|x_{n+p}-a\right|<\varepsilon/2.\end{cases}\Rightarrow\left|x_n-x_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

Теперь нетрудно заметить, что последовательность x_n фундаментальна, ибо в определении 4 можно считать, что $n+p\equiv m>n$.

Предположим теперь, что последовательность x_n фундаментальна. Во-первых, покажем, что она ограничена. Пусть $\varepsilon=1$. Тогда $\exists r_0\forall m,n>r_0\ \left|x_n-x_m\right|<1$, то есть

$$-1+x_N<x_n<1+x_N,\ N=\ r_0+1\ .$$

Итак, $|x_n|<M, M=1+|x_N|+\max\ |x_1|,\dots,|x_{N-1}|$. Во-вторых, из теоремы Больцано — Вейерштрасса следует, что найдется подпоследовательность $\left(x_{k_n}\right)\to a$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r\begin{cases}\left|x_{k_n}-a\right|<\varepsilon/2,\\ \left|x_{k_n}-x_n\right|<\varepsilon/2.\end{cases}\Rightarrow\left|x_n-a\right|\le\left|x_n-x_{k_n}\right|+\left|x_{k_n}-a\right|<\varepsilon.$$

Итак, $x_n\ \Rightarrow a$.▶

Замечание 3. Тот факт, что последовательность x_n не является фундаментальной (расходится), можно записать следующим образом:

$$\exists\varepsilon>0\forall r>0\exists m>r\exists n>r\ \left|x_m-x_n\right|\ge\varepsilon\ .$$

Поясним это утверждение. Должны найтись члены последовательности со сколь угодно большими номерами, расстояния между которыми больше фиксированной положительной постоянной.

Замечание 4. Можно показать, что определение 4 можно сформулировать и так:

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall n>N\ \left|x_N-x_n\right|<\varepsilon\ .$$

Докажите равносильность этого определения и определения 4.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Довольно просто теперь установить, что последовательность $(-1)^n$ расходится. Достаточно заметить, что справедливо неравенство $|x_{n+1}-x_n|>1$ для всех *n*.

Пример 2. Последовательность $g_n = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n$ кажется ограниченной, но

$$|g_{2n}-g_n| = |1/2n+\ldots+1/(n+1)| > |1/2n+\ldots+1/2n| > 1/2.$$

Поэтому последовательность g_n расходится и является неограниченной (ведь она возрастает).

***Задачи*:** 72, 198, 207, 637.1, 637.2.

ЧАВО

1. *Подпоследовательность — это то, что останется от последовательности, когда из нее удалить несколько элементов (членов последовательности)?*

Это не совсем так. Лучше представить себе бесконечный ряд кресел с номерами $1,2,3,4,\ldots$ (слева направо). В каждом кресле сидит какое-то число. Это и есть образ последовательности. Удалим из нескольких кресел числа так, что останется бесконечное множество чисел, сидящих в креслах. Теперь переместим в пустое кресло с наименьшим номером ближайшее (справа) число. Аналогичным образом заполним остальные пустые кресла. Все кресла будут заполнены! Теперь у нас есть новая последовательность (подпоследовательность исходной последовательности).

2. *Верно ли я буду искать верхний предел последовательности* (x_n)*? Строю следующую последовательность:* $y_1 = x_1$; $y_2 = \max(x_1,x_2)$; $y_3 = \max(x_1,x_2,x_3)\ldots$ *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *и будет верхним пределом последовательности* (x_n).

Неверно. На самом деле надо строить последовательность: $\overline{y}_1 = \sup(x_1,x_2,x_3,\ldots)$; $\overline{y}_2 = \sup(x_2,x_3,x_4,\ldots)$; $\overline{y}_3 = \sup(x_3,x_4,x_5,\ldots)\ldots$ Теперь $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{y}_n$ и будет верхним пределом последовательности (x_n).

3. *Выходит, что множество сходящихся последовательностей совпадает с множеством фундаментальных последовательностей?*

Это верно. Заметьте, что в определении фундаментальной последовательности не фигурирует предел последовательности. Поэтому фундаментальность последовательности часто используется при доказательстве теорем.

ПЯТЬ ЗАПОВЕДЕЙ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

- Имейте запас из нескольких известных сходящихся и расходящихся последовательностей.
- Посмотрите, не будет ли последовательность (x_n) монотонной.

- Есть подозрения, что последовательность (x_n) расходится. Ищите две подпоследовательности с разными пределами.
- Для рекуррентных последовательностей сначала докажите сходимость, а потом ищите предел.
- Лемма о двух дружинниках помогает в разных ситуациях.

ЛЕКЦИЯ 7

Окрестности. Базы. Предел функции по базе

Пусть $f : X \to \mathbf{R}$. Мы хотели бы формализовать фразу: «если x приближается (стремится) к a, то $f(x)$ приближается (стремится) к α». Нас пока не интересует, с какой стороны x приближается к a. Поэтому можно считать $|x-a|$ характеристикой «близости» x и a. При этом хотелось бы, чтобы погрешность $|f(x)-\alpha|$ могла быть сделана сколь угодно малой, если выбрана нужная погрешность $|x-a|$. Для предела в точке a не имеет значения, чему равно $f(a)$. Поэтому будем считать, что значение $f(a)$ не определено. Не путайте предел функции в точке a и значение функции в этой точке!

Определение 1. Если можно найти погрешность $|x-a|$, которая обеспечит нам любую заданную погрешность $|f(x)-\alpha|$, то будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к α при x, стремящемся к a. Принято обозначать погрешность для аргумента буквой δ, а погрешность для функции буквой ε. Тогда краткая формулировка определения имеет следующий вид:

$$\exists \alpha \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon).$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$. Говорят еще: функция $f(x)$ сходится к α при x, стремящемся к a, или функция $f(x)$ имеет предел (равный α при x, стремящемся к a).

Замечание 1. В определении 1 важную роль играют два интервала с центром в точках a и α. Эти интервалы называются окрестностями (точнее проколотой δ-окрестностью точки a и ε-окрестностью точки α). Если проанализировать определение, то можно заметить, что эти окрестности не обязательно брать симметричными. Важно только, чтобы в пересечении двух окрестностей содержалась окрестность. Множество окрестностей точки a называют базой (окрестностей).

Определение 2. Пусть X — некоторое множество, а $\mathbf{B} = B$ совокупность подмножеств множества X $B \subset X$, удовлетворяющая двум условиям: а) $\forall B \in \mathbf{B} (B \neq \varnothing)$; б) $\forall B_1, B_2 \in \mathbf{B} \exists B_3 \in \mathbf{B} (B_3 \subset B_1 \cap B_2)$. В этом случае множество $\mathbf{B}$ называется *базой* на множестве X. Элементы B базы $\mathbf{B}$ часто называют *окрестностями*.

Определение 3. Общее определение предела функции $f : X \to \mathbf{R}$ по базе $\mathbf{B}$:

$$\exists \alpha \forall \varepsilon > 0 \exists B \forall x \in B \ \left| f(x) - \alpha \right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{B}} f(x) = \alpha.$$

Приведем примеры наиболее распространенных баз на множестве $\mathbf{R}$.

Пример 1. База $x \to a+$ (читается: «икс» стремится справа к a) состоит из окрестностей $U_\delta^+(a) = (a, a+\delta)$.

Пример 2. База $x \to a-$ (читается: «икс» стремится слева к a) состоит из окрестностей $U_\delta^-(a) = (a-\delta, a)$.

Пример 3. База $x \to a$ (читается: «икс» стремится к a) состоит из окрестностей $U_\delta^+(a) \cup U_\delta^-(a)$.

Пример 4. База $x \to +\infty$ (читается: «икс» стремится к плюс бесконечности) состоит из окрестностей $U_\delta^+(\infty) = (\delta, +\infty)$.

Пример 5. База $x \to -\infty$ (читается: «икс» стремится к минус бесконечности) состоит из окрестностей $U_\delta^-(\infty) = (-\infty, \delta)$.

Пример 6. База $x \to \infty$ (читается: «икс» стремится к бесконечности) состоит из окрестностей $U_\delta(\infty) = \{|x| > \delta\}$.

Замечание 2. Построим базу для предела последовательности. Пусть $X = \mathbb{N}$, тогда искомая база: $\mathbf{B}=\{B_n\}, B_n = \{n, n+1, \ldots\}$.

Пример 7. Как пользоваться базами из примеров 1–6. Пусть дана функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда запись $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ означает, что истинно высказывание:

$$\exists\alpha\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0(a < x < a+\delta \Rightarrow | f(x) - \alpha | < \varepsilon).$$

Кстати, в учебниках и задачниках встречается равносильное обозначение $x \to a \pm 0$ баз $x \to a\pm$.

Определение 4. Будем писать $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \infty$, если истинно высказывание: $\forall\varepsilon > 0\exists B \in \mathbf{B}\forall x \in B(| f(x) | > \varepsilon)$.

Определение 5. Пусть $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = +\infty$, когда верно утверждение $\forall\varepsilon > 0\exists B \in \mathbf{B}\forall x \in B(f(x) > \varepsilon)$. Аналогично пишут $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = -\infty$, если $\forall\varepsilon > 0\exists B \in \mathbf{B}\forall x \in B(f(x) < -\varepsilon)$.

Замечание 3. Отметим следующее утверждение, которое сразу следует из соответствующих определений:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha, \\ \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \alpha. \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \alpha.$$

Докажем теорему, которая сводит проблему существования предела функции к задаче нахождения некоторых пределов последовательностей. Эту теорему называют критерием Гейне.

Теорема 1 (*Гейне*). Соотношение $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ справедливо тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_n), сходящейся к числу a, такой, что $x_n > a$, соответствующая последовательность $f(x_n)$ сходится к числу α.

◄ *Необходимость*. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$. Тогда можно записать, что $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0(a < x < a+\delta \Rightarrow | f(x) - \alpha | < \varepsilon)$.

Для последовательности $(x_n) \to a, x_n > a$ по данному числу δ найдется $r > 0$, что для всех $n > r$ выполняется неравенство $a < x_n < a + \delta$, но тогда и $| f(x_n) - \alpha | < \varepsilon$. Первая часть теоремы доказана.

Достаточность. Предположим, что число α не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a+$. Тогда найдется число ε_0 и последовательность (x_n), что справедливо утверждение:

$$0 < x_n - a < 1/n \Rightarrow | f(x) - \alpha | \geq \varepsilon_0.$$

Значит, $x_n \to a$, а $f(x_n)$ не стремится к α. Противоречие.►

Замечание 4. Мы привели доказательство для базы $x \to a+$. Очевидно, что соответствующий критерий Гейне справедлив и для следующих баз: $x \to a-$, $x \to a$, $x \to \infty$, $x \to +\infty, x \to -\infty$. Например, в случае $x \to a$ надо проводить проверку для любой последовательности (x_n), сходящейся к числу a, такой, что $x_n \neq a$.

Определение 6. Две базы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ называются эквивалентными, если любой элемент базы $\mathbf{B}_1$ содержится в некотором элементе базы $\mathbf{B}_2$ и наоборот.

Замечание 5. Пусть базы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ эквивалентны. Тогда пределы $\lim\limits_{\mathbf{B}_1} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathbf{B}_2} f(x)$ существуют или не существуют одновременно.

Упражнение 1. Может ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbf{R}$ иметь предел только в одной точке?

***Задачи*:** 83, 88, 91, 98, 102, 103, 118, 123, 133.

ЧАВО

1. *Если в определении предела* $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ *я напишу:* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $(a < x < a + \delta \Rightarrow | f(x) - \alpha | < 100\varepsilon)$*, то будет ли это (число* 100*) ошибкой?*

Это будет равносильное определение! Вот если вы напишете, например, $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ldots$ или $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \ldots$, то это уже будет грубой ошибкой. Кстати, это будет новое определение, но другого понятия. Подумайте, какого именно?

2. *Почему в определении предела* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ *для переменной x берут проколотую окрестность* $0 < |x - a| < \delta$ *?*

Это сделано для того, чтобы отличать значение функции в точке a и значение предела в этой точке. Так функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, а ее значение в нуле $f(0) = 0$.

3. *Можно ли в определении* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ *рассматривать только* $\varepsilon \leq 1$.

Можно, так как окрестность, которая найдена для $\varepsilon = 1$, годится и для любого $\varepsilon > 1$.

4. *Как отличать понятия — последовательность сходится, последовательность имеет предел.*

Обычно говорят, что последовательность сходится, если она имеет конечный предел. Когда предел последовательности равен $\pm\infty, \infty$ (бесконечно большая последовательность), то не говорят, что последовательность сходится.

5. *Может ли база состоять из конечного набора множеств?*

Такие базы не представляют особого интереса. Например, база из трех отрезков: $1,3$, $2,4$, $2,3$ на множестве $[1,4]$. Предел по такой базе имеют только те функции, которые являются постоянными на отрезке $[2,3]$.

ЛЕКЦИЯ 8

Свойства предела функции

Некоторые определения и теоремы справедливы для любых баз.

Определение 1. Если $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* по данной базе. Когда $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* по базе **B**.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *локально ограниченной* по базе $\mathbf{B}$, если найдется число M и элемент базы $B \in \mathbf{B}$, что $\forall x \in B(|\, f(x)| \le M)$.

Вообще говоря, слово «локально» будет означать, что данное свойство выполняется на некотором элементе базы (окрестности).

Рассмотрим несколько свойств у предела по тем базам, которые перечислены в лекции 7. Заметим, что они (свойства) справедливы и для любых баз.

Свойство 1. Если $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \alpha$, то функция $f(x)$ локально ограничена по базе $\mathbf{B}$. ◄ Следует из определения предела. ►

Свойство 2. Функция не может иметь более одного предела по данной базе.

Свойство 3. Произведение локально ограниченной на бесконечно малую (по одной и той же базе) является бесконечно малой.

Свойство 4. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x) = \alpha_i,\ i = 1,2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{\mathbf{B}} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \alpha_1 \pm \alpha_2$;

б) $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_1(x)\, f_2(x) = \alpha_1 \alpha_2$;

в) $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_1(x)/f_2(x) = \alpha_1/\alpha_2,\ f_2(x) \ne 0, \alpha_2 \ne 0$.

Свойство 5. Допустим, что локально выполняется неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$ и $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x)) = \alpha_i, i = 1,2$, тогда $\alpha_1 \le \alpha_2$ (то есть переход к пределу в нестрогом неравенстве сохраняет это неравенство).

Свойство 6 (*лемма о двух милиционерах*). Если $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \lim\limits_{\mathbf{B}} h(x) = \alpha$ и справедливо неравенство $f(x) \le g(x) \le h(x)$, то $\lim\limits_{\mathbf{B}} g(x) = \alpha$.

◀Доказательство свойств 2–6 следует из критерия Гейне (лекция 7). ▶

Свойство 7 (*критерий Коши*). Для того чтобы существовал $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbf{B} \forall x', x'' \in B (| f(x') - f(x'') | < \varepsilon).$$

◀Ограничимся случаем $x \to a+$. Для других баз доказательство аналогично.

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$. Тогда по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется элемент базы $B = \{a < x < a + \delta\}$, что для всех $x \in B$ выполняется неравенство $| f(x) - \alpha | < \varepsilon / 2$. Значит, для всех $x', x'' \in B$ получаем

$$\left| f(x') - f(x'') \right| \le \left| f(x') - \alpha \right| + \left| \alpha - f(x'') \right| < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Достаточность. Воспользуемся критерием Гейне. Пусть последовательность $x_n \to a, x_n > a$ и $B = (a, a + \delta)$.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in B (| f(x'') - f(x') | < \varepsilon).$$

Теперь по заданному числу δ найдем r, что для всех $n > r$ выполняются неравенства: $| x_n - a | < \delta, x_n > a$. Тогда при всех $n, m > r$ выполняется неравенство $| f(x_n) - f(x_m) | < \varepsilon$. Значит, последовательность $f(x_n)$ является фундаментальной (лекция 6) и существует $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. Для любой другой последовательности (y_n), аналогично, должен существовать предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = \beta$, причем $\alpha = \beta$. Если бы это было не так, то последовательность $(z_n) = x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots \to \alpha$, но $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$ не существовал бы. Итак, по критерию Гейне получим, что $\exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$. ▶

Замечание 1. Критерий Коши часто используется в различных доказательствах.

***Задачи*:** 127-130, 231, 233, 234, 289, 312, 313.

ЧАВО

1. *У вас есть две теоремы. Одна теорема о дружинниках, а другая о милиционерах.*

Теорема о дружинниках относится к последовательностям, ибо дружинники передвигаются пешком (дискретно). Теорема о милиционерах относится к функциям, так как милиционеры могут воспользоваться автомобилем.

ЛЕКЦИЯ 9

Замечательный тригонометрический предел

Замечание 1. Ясно, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$, ибо можно взять $\delta = \varepsilon$.

Замечание 2. Так как справедливо неравенство

$$\big||f(x)| - |\alpha|\big| \le |f(x) - \alpha|,$$

то из существования $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$ следует, что $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\alpha|$.

Докажем одно вспомогательное неравенство.

Лемма 1. Для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$x\cos x < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

◄ Пусть дан сектор *OAB* единичного круга с дугой длины x, $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим два треугольника: один из треугольников *OAB* вписан в сектор, а второй *OAT*, прямоугольный, содержит сектор, имея общий угол и общую сторону (рис. 1).

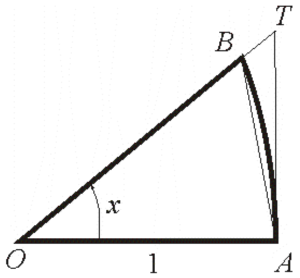


Рис. 1

Если сравнить площади этих трех фигур, то получим $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$.

Отсюда и следует требуемое неравенство $x < \operatorname{tg} x \Rightarrow x\cos x < \sin x$. ►

Лемма 2.

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

◄ Так как функции $|x|$ и $|\sin x|$ являются четными, то из леммы 1 получим, что в первой и четвертой четвертях справедливо неравенство

$$0 \le |\sin x| < |x|.$$

Кроме того,

$$0 \le |\cos x - 1| = 2\left|\sin^2 \frac{x}{2}\right| \le 2\left|\sin \frac{x}{2}\right| < |x|.$$

Теперь осталось применить свойство 6 «лемма о двух милиционерах» (лекция 8). ►

Пример 1 (*первый замечательный предел*). Из лемм 1 и 2 вытекает, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (2)$$

ибо $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1.$

Замечательный экспоненциальный предел

Лемма 3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=a$ и (k_n) — бесконечно большая последовательность из натуральных чисел. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(k_n)=a$.

◀ Из условий теоремы, во-первых, следует утверждение:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists r\in\mathbb{N}\ \forall n>r\ \left(\left|f(n)-a\right|<\varepsilon\right).$$

Во-вторых, по найденному r можно найти p, что $\forall n>p\ (k_n>r)$. Но тогда

$$\forall n>p\ \left(\left|f(k_n)-a\right|<\varepsilon\right),$$

а это и есть определение $\lim\limits_{n\to\infty} f(k_n)=a$. ▶

Пример 2 (второй замечательный предел). Докажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (3)$$

Отметим сначала (см. лекцию 5), что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e.$$

Рассмотрим некоторую последовательность (k_n) целых чисел, стремящуюся к бесконечности. Тогда по лемме 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=e;\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=e.$$

Возьмем теперь последовательность (x_n) действительных чисел, стремящуюся к бесконечности. Пусть $k_n=[x_n]$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}\le\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\le\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

Осталось применить критерий Гейне (лекция 7) и теорему «о двух дружинниках» для последовательностей (лекция 4).

Следствие 1. Пусть $x_n\to-\infty, y_n=-1-x_n$. Тогда $y_n\to+\infty$ и

$$\lim_{x_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim_{y_n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+y_n}\right)^{-1-y_n}=\lim_{y_n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1}=e.$$

Откуда по критерию Гейне получим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x^{-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+x^{-1}\right)^{x}=e.$$

Следствие 2. Пусть $x_n \to 0; y_n = \dfrac{1}{x_n} \to \infty$. Тогда

$$\lim_{x_n \to 0} \left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{y_n \to \infty} \left(1 + y_n^{-1}\right)^{y_n} = e.$$

Значит, $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$.

Пример 3. Покажем, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0, a > 1, m \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Можно рассмотреть только случай $m \in$ □. Так как $\dfrac{x^m}{a^x} = \left(\dfrac{x}{b^x}\right)^m, b > 1$, то достаточно показать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{b^x} = 0$. Пусть последовательность $(x_n) \to \infty$. Обозначим $k_n = [x_n]$. Тогда, вспоминая предел $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{a^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{a^{n+1}} = 0$ из лекции 5, получим

$$0 \le \frac{x_n}{b^{x_n}} \le \frac{k_n + 1}{b^{k_n}} = \frac{k_n + 1}{b^{k_n + 1}} b \to 0.$$

Из критерия Гейне (лекция 7) и следует требуемый результат.

Пример 4.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0. \tag{5}$$

Достаточно показать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lg x}{x^\alpha} = 0$, ибо логарифмы с разными основаниями отличаются постоянным множителем. Пусть некоторая последовательность (x_n) действительных чисел стремится к бесконечности. Тогда $(t_n) = (\lg x_n) \to +\infty$. Из предыдущего примера получаем

$$\frac{\lg x_n}{x_n} = \frac{t_n}{10^{t_n}} \to 0.$$

По критерию Гейне $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lg x}{x} = 0$. Наконец, пусть $x_n^{\ \alpha} = y_n \to +\infty$.

$$\frac{\lg y_n}{y_n} = \alpha \frac{\lg x_n}{x_n^{\ \alpha}} \to 0.$$

Осталось опять сослаться на критерий Гейне.

Задачи: 159, 175, 176, 401, 406, 407.

ЧАВО

1. *Некоторые пределы для вас замечательные, какие-то пределы для вас важные.*

Надо было бы все эти пределы называть важными, но почти общепринято называть указанные выше пределы замечательными.

ЛЕКЦИЯ 10

Непрерывные функции (локальные свойства)

Пусть задана функция $f: X \to \mathbf{R}$, где X — промежуток.

Определение 1. Функция f называется *непрерывной в точке* $a \in X$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. В противном случае функция называется *разрывной в этой точке*. В крайних точках промежутка (отрезок, полуинтервал) надо брать соответствующий односторонний предел.

Замечание 1 (непрерывность на языке $\varepsilon - \delta$). Непрерывность функции f в точке a означает, что для всех $x \in X$ должно быть истинно высказывание:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Определение 2. Функция f называется *непрерывной на множестве X*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Замечание 2. Выясним геометрический смысл непрерывности**.** Пусть $P_{\delta,\varepsilon} = \{(x, y) \,\|\, |x - a| < \delta, |y - f(a)| < \varepsilon\}$ — прямоугольник с центром в точке $(a, f(a))$. Непрерывность функции f в точке a означает, что найдется прямоугольник $P_{\delta,\varepsilon}$ любой заданной высоты ε, такой, что над и под этим прямоугольником нет точек графика $y = f(x)$.

Замечание 3. Символически непрерывность в точке a можно записать так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$.

Определение 3. Точка $a \in X$ называется точкой разрыва функции f, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ либо $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует.

Точки разрыва можно разбить на классы (классифицировать). Самой распространенной является следующая классификация:

Определение 4. a — точка *устранимого* разрыва функции f, если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, но $A \neq f(a)$. a — точка разрыва *первого рода* функции f, если

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) = A, \\ \exists \lim\limits_{x \to a-} f(x) = B, \end{cases}$$

но $A \neq B$. Остальные точки, в которых функция не является непрерывной, называют точками разрыва *второго рода* (не существует хотя бы один из односторонних пределов или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$).

Введем одну полезную функцию, которую называют «сигнум» (по-латыни signum — знак).

Определение 5.

$$\operatorname{sgn} x \equiv \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Функции $f_1(x) = |\operatorname{sgn} x|$; $f_2(x) = \operatorname{sgn} x$; $f_3(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $f_3(0) = 0$; имеют в точке $x = 0$, соответственно, устранимый разрыв, разрыв первого рода и разрыв второго рода. Кстати, отметим следующее тождество: $|x| \equiv x \cdot \operatorname{sgn} x$.

Воспользуемся свойствами пределов (лекция 8).

Свойство 1. Арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям. При делении $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ надо добавить (в точке непрерывности x_0) одно естественное ограничение $(g(x_0) \neq 0)$.

Свойство 2. Пусть X, Y, Z промежутки. Рассмотрим две функции $f: X \to Y, g: Y \to Z$. Допустим, что функция $f: X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, а функция $g: Y \to Z$ непрерывна в точке $b = f(a) \in Y$. Тогда функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

◄ Доказательство получим из следующей цепочки утверждений:

$$\forall (x_n \to a) \Rightarrow (f(x_n) \to f(a)) \Leftrightarrow (y_n = f(x_n) \to b = f(a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g(y_n) \to g(b)) \Rightarrow g\big(f(x_n)\big) \to g(f(a)).$$

При этом используется критерий Гейне (лекция 6).►

Замечание 4. Последнее свойство часто используется при нахождении пределов. Например, пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1; \quad \lim_{x \to a} (1 + f(x))^{1/f(x)} = e.$$

Лемма 1. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, тогда справедливы два утверждения:

1) $f(x_0) > p \Rightarrow f(x) > p$ для всех x из некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$;

2) $f(x_0) < q \Rightarrow f(x) < q$ для всех x из некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$.

◄ Достаточно доказать первое утверждение. Оно следует из определения непрерывности при $\varepsilon = f(x_0) - p$.►

Свойство 3 (сохранение знака непрерывной функции). Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то найдется окрестность $U_\delta(x_0)$, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ справедливо равенство $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$.

◄ Следует из леммы 1.►

***Задачи*:** 413, 414, 416, 424, 425, 442, 457, 458, 470.

ЧАВО

1. *Чем отличаются локальные и глобальные свойства?*

Локальными называются свойства, которые справедливы в ***некоторой*** окрестности. Глобальными называются свойства, которые справедливы во всей области определения функции (то есть для ***всех*** окрестностей).

2. *Если взять сумму двух разрывных функций, то получится разрывная функция?*

Не обязательно. Например, $x-f(x)+f(x)=x$, где $f(x)$ — разрывная функция.

ЛЕКЦИЯ 11

Глобальные свойства непрерывных функций

Пусть задана непрерывная функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Множество непрерывных функций на промежутке P будем обозначать символом $C(P)$ (на отрезке — $C[a,b]$).

Есть несколько важных свойств непрерывных функций, которые справедливы на всей области определения непрерывной функции (глобальные свойства).

Теорема 1 (*Вейерштрасса-1*). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

◄ Применим «противный» метод. Пусть функция f неограничена на этом отрезке. Тогда должна найтись последовательность (x_n), что справедливы неравенства $|f(x_n)|>n$. Так как $x_n\in[a,b]$, то по теореме Больцано — Вейерштрасса (лекция 6) найдется подпоследовательность $x_{k_n}\to x_0\in[a,b]$. Но, с одной стороны, по непрерывности $f\left(x_{k_n}\right)\to f(x_0)$, а с другой — $\left|f\left(x_{k_n}\right)\right|>k_n$, $k_n\to\infty$. Полученное противоречие и доказывает ограниченность функции f.►

Замечание 1. Из непрерывности функции f на <u>интервале</u> не следует, что функция ограничена на этом интервале. Упражнение: попробуйте указать то место, где доказательство теоремы 1 не проходит (для интервала).

Теорема 2 (*Вейерштрасса-2*). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдутся точки на этом отрезке, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

◄ Достаточно рассмотреть случай наибольшего значения. От противного. Пусть $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$ (существует по теореме 1) и для всех $x\in[a,b]$ справедливо неравенство $f(x)<M$. Тогда, с одной стороны, функция $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ принимает сколь угодно большие значения. С другой стороны, функция $g(x)$ непрерывна и ограничена по теореме 1. Противоречие.►

Теорема 3 (*теорема о промежуточном значении*). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$. Тогда найдется точка $c\in[a,b]$, что $f(c)=0$.

◄ Можно считать, что $f(a)<0, f(b)>0$. Делим отрезок $[a,b]\equiv[a_1,b_1]$ пополам точкой $c=\dfrac{a+b}{2}$. Предполагаем, что $f(c)\neq 0$, иначе теорема доказана. Обозначим через $[a_2,b_2]$ тот из двух отрезков, для которого $f(a_2)<0, f(b_2)>0$. Далее делим пополам отрезок $[a_2,b_2]$ и проводим аналогичные рассуждения. Получим последовательность стягивающихся отрезков $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$, причем $f(a_n)<0,\ f(b_n)>0,\ n\in\mathbb{N}$. По лемме о вложенных отрезках (лекция 4) найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам. Но тогда

$$a_n\to c\ \wedge\ b_n\to c\ \Rightarrow\ f(a_n)\to f(c)\ \wedge\ f(b_n)\to f(c)\ .$$

Так как $f(a_n)<0, f(b_n)>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n)=f^2(c)\le 0$. Следовательно, $f(c)=0$. Доказательство завершено.►

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)\neq f(b)$. Тогда функция f принимает любое значение между $f(a)$ и $f(b)$.

◄ Пусть, например, справедливо неравенство $f(a)<\lambda<f(b)$. Тогда для функции $g(x)=f(x)-\lambda$ выполняются условия теоремы. Значит, найдется точка c, что справедливо равенство $g(c)=f(c)-\lambda=0$.►

Следствие 2. Если $f\in C[a,b]$, то $f([a,b])=[m,M]$, где m — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке a,b, а M — наибольшее значение этой функции на том же отрезке.

Монотонные функции.
Точки разрыва монотонных функций

В следующем определении мы выделим четыре класса монотонных функций.

Определение 1. Функция $f:X\to\mathbf{R}$ называется *возрастающей* на множестве X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\ x_1\ <f\ x_2\ \right);$$

убывающей на X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\ x_1\ >f\ x_2\ \right);$$

неубывающей на X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\ x_1\ \le f\ x_2\ \right);$$

невозрастающей на X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\ x_1\ \ge f\ x_2\ \right).$$

Любую из указанных функций называют *монотонной* на множестве X. Монотонные функции обладают рядом хороших свойств. Напомним обозначение: $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = f(a\pm)$.

Лемма 1. Пусть функция f — неубывающая на отрезке $[a,b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a,b)$ справедливы равенства:

$$f(x_0-) = \sup_{x<x_0} f(x);\ f(x_0+) = \inf_{x>x_0} f(x). \tag{1}$$

При этом

$$f(x_0-) \le f(x_0) \le f(x_0+). \tag{2}$$

Если функция f — невозрастающая на отрезке $[a,b]$, то $\forall x_0 \in (a,b)$ справедливы равенства:

$$f(x_0-) = \inf_{x<x_0} f(x);\ f(x_0+) = \sup_{x>x_0} f(x), \tag{3}$$

и неравенство

$$f(x_0+) \le f(x_0) \le f(x_0-). \tag{4}$$

◀ Как обычно, достаточно доказать первую часть леммы. Пусть функция f — неубывающая на отрезке $[a,b]$. Неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция ограничена $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Обозначим $A = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$. Тогда $\forall x < x_0 (f(x) \le A)$. Кроме того, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (f(x_0 - \delta) > A - \varepsilon)$ (лекция 4). Из монотонности функции f следует, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > A - \varepsilon$. Итак, для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ имеем неравенство

$$A - \varepsilon < f(x) \le A < A + \varepsilon.$$

Это и означает (по определению), что $f(x_0-) = A = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$. Первое из равенств (1) доказано. Второе доказывается аналогично. Так как $\forall x < x_0 (f(x_0) \ge f(x))$, то $f(x_0) \ge A$. Откуда и следует неравенство (2).▶

Следствие 3. Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода.

◀ Из неравенства (2) или неравенства (4) следует, что устранимых разрывов и разрывов второго рода у монотонной функции быть не может.▶

Следствие 4. Для непрерывности монотонной функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы она принимала все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

◀ Достаточно рассмотреть случай неубывающей функции f. Необходимость вытекает из следствия 1. Достаточность докажем от противного. Пусть функция принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$, но некоторая точка x_0 является точкой разрыва. Тогда либо $f(x_0) \ne f(x_0+)$, либо $f(x_0) \ne f(x_0-)$. Достаточно рассмотреть первый случай. Возьмем $l \in (f(x_0), f(x_0+))$. Тогда (напомним, что $f(x_0+)$ не больше значений функции справа от x_0, а $f(x_0)$ не меньше всех значений функции слева) функция f не принимает значение l. Противоречие.▶

Теорема 4. Если функция f является непрерывной и возрастающей (убывающей), то она имеет непрерывную обратную функцию f^{-1}.

◀ Пусть функция f является возрастающей. Тогда она инъективна (введение в анализ). По следствию 4 функция f взаимно однозначная. Значит, есть обратная возрастающая функция f^{-1}. Непрерывность вытекает опять из следствия 4.▶

Упражнение 1. Найдите все корни уравнения

$$x^5 + x - 1 = 0$$

с точностью до 0,1.

***Задачи*:** 224, 225, 471, 474, 506, 510, 515, 518, 542.

ЧАВО

1. *Теорема Вейерштрасса утверждает, что функция непрерывная на отрезке ограничена. Я просмотрел много функций непрерывных на интервале, и они все ограничены. Может быть, теорему можно обобщить?*

Обобщить теорему не удается. Рассмотрите функцию $y = \frac{1}{x}$ на интервале $(0,1)$.

2. *Первая теорема Вейерштрасса следует из второй. Может быть, вторую только и надо доказывать?*

Доказательство второй теоремы использует первую теорему. Кстати, обе теоремы не верны для интервалов и полуинтервалов.

3. *Можно ли определить непрерывную функцию, как функцию, которая принимает любое промежуточное значение?*

Функция $y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbf{R}$ принимает все значения, но является разрывной. Есть простые примеры функций, у которых разрывы первого рода, но они принимают любое промежуточное значение. Кстати, **монотонную** непрерывную функцию так определить можно. Мы этот факт доказали.

4. *Какая разница между не убывающими и неубывающими функциями?*

Все функции, которые не являются убывающими, будут не убывающими. Например, возрастающие функции.

ЛЕКЦИЯ 12

Элементарные функции

Определение 1. *Простейшими элементарными функциями* называются следующие функции: $c; x^b; a^x; \log_a x; \sin x; \cos x; \arcsin x; \operatorname{arctg} x$.

Определение 2. Арифметические операции $(+, -, \times, \div)$ и операцию композиции $(f \circ g)(x)$ будем называть *основными* операциями над функциями.

Определение 3. Функции, которые можно получить из простейших элементарных с помощью конечного множества основных операций, называются *элементарными функциями*.

Докажем, что элементарные функции непрерывны в области определения. Достаточно обосновать непрерывность простейших элементарных функций (лекция 10).

Непрерывность функции $\sin x$ следует из неравенства

$$|\sin x - \sin x_0| \le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0|; \delta = \varepsilon.$$

Непрерывность функции $\cos x$ получается аналогично.

Функции $\arcsin x, \arccos x$ непрерывны как обратные к монотонным возрастающим функциям.

Рассмотрим функцию a^x, $a > 0$, $a \ne 1$. Сначала докажем непрерывность этой функции в точке $x = 0$ справа. Рассмотрим любую последовательность $(x_n) \to 0+$; $x_n < 1$. Тогда найдется последовательность целых чисел $(k_n) \to +\infty$, такая, что выполняются неравенства

$$a^{\frac{1}{k_n+1}} \le a^{x_n} \le a^{\frac{1}{k_n}}.$$

Известно (лекция 5), что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. По критерию Гейне (лекция 7) отсюда следует непрерывность функции a^x в точке $x = 0$ справа. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$. Значит, непрерывность слева в нуле получим аналогично. Так как при $\Delta x \to 0$

$$\left|a^{x+\Delta x} - a^x\right| = a^x \left|a^{\Delta x} - 1\right| \to 0,$$

то функция a^x непрерывна в области определения.

Функция $\log_a x$ непрерывна как обратная к монотонной возрастающей функции a^x.

Так как $x^a = e^{a\ln x}$, то функция $y = x^a (x > 0)$ непрерывна в области определения (композиция непрерывных функций). Непрерывность функций $y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ следует из непрерывности функции $y = x, x \in \mathbb{R}$.

Основной результат этого раздела — все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Новые основные пределы функций

К основным пределам (лекция 9) добавим еще несколько.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (1)$$

◄ $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \to \ln e = 1$ при $x \to 0$.►

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \qquad (2)$$

◄Обозначим $f(x) = e^x - 1 \to 0, x \to 0$; $g(y) = \dfrac{y}{\ln(1+y)}, y \to 0$. Тогда

$$g(f(x))=\frac{e^x-1}{x}\to 1, x\to 0.$$

Что и требовалось.▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (3)$$

◀Этот предел сводится к своему частному случаю (2) заменой $x\ln a=t\to 0$.▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lambda. \qquad (4)$$

◀Пусть $f(x)=\lambda\ln(1+x)$; $g(y)=\frac{e^y-1}{y}$. Тогда

$$g(f(x))=\frac{(1+x)^\lambda-1}{\lambda\ln(1+x)}\to 1, x\to 0,$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x}=\lim_{x\to 0}g(f(x))\frac{\lambda\ln(1+x)}{x}=\lambda.$$

Равенство (4) доказано.▶

Задачи: 593–597, 603, 604, 614, 620.

ЧАВО

1. *Вы дали определение элементарных функций. Мы часто пользуемся функцией* $y=|x|$. *Она будет элементарной?*

Да, ибо $|x|=\sqrt{x^2}$. Вообще-то можно считать, что элементарные функции это те, свойства которых вам хорошо знакомы.

ЛЕКЦИЯ 13

Сравнение бесконечно малых. Асимптотические формулы

В современной математике и физике часто применяются следующие методы: метод возмущений, метод пограничного слоя, метод локальной линеаризации, метод малого параметра, метод осреднения, метод перевала и т. п. Все эти методы являются разновидностями асимптотических методов (методов получения асимптотических формул).

Вначале дадим несколько определений, в которых и появляются асимптотические формулы.

Определение 1. Пусть $\exists K>0\forall t\in E(|f(t)|\le K|g(t)|)$. Тогда будем писать $f(t)=O(g(t)),\ t\in E$ (читается: O большое).

Определение 2. Если в определении 1 $E=\dot V(a)$ — некоторая проколотая окрестность точки a, то будем писать: $f(t)=O(g(t)),\ t\to a$.

Определение 3. Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{V}(a) \forall t \in \dot{V}(a)(|f(t)| \le \varepsilon |g(t)|)$. Тогда будем писать: $f(t) = o(g(t)),\ t \to a$ (читается: o малое).

Определение 4. Будем говорить, что две функции *асимптотически сравнимы*, и писать $f(t) \copyright g(t)(t \in E)$ или $f(t) \copyright g(t)(t \to a)$, если одновременно выполняются две соответствующие асимптотические формулы: $f(t) = O(g(t)),\ g(t) = O(f(t))$.

Определение 5. Функцию $f(t)$ будем называть *асимптотически равной* функции $g(t)$ в точке a (*эквивалентной* в точке a), если справедливо равенство

$$f(t) - g(t) = o(g(t)), t \to a.$$

Обозначение: $f(t) \sim g(t), t \to a.$

Определение 6. Последовательность функций $(f_n(t)), t \in E, n = 0,1,...$ называется *шкалой* (*асимптотической последовательностью*) при $t \to a$, если для всех $n \in \mathbf{Z}$

$$f_{n+1}(t) = o(f_n(t)),\ t \to a. \tag{1}$$

Определение 7. *Асимптотическим разложением* функции $f(t)$ по шкале $(f_n(t))$ будем называть символическую запись

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t), t \to a, \tag{2}$$

если справедливо счетное множество равенств

$$f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(t) = o(f_N(x)), t \to a, N = 0,1,... \tag{3}$$

При этом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$ называется *асимптотическим рядом* (*асимптотическим разложением*) функции $f(t)$ по шкале $(f_n(t))$.

Замечание 1. Отметим, что равенства (3) эквивалентны следующим:

$$f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(t) = O(f_{N+1}(t)), t \to \infty, N = 0,1,... \tag{4}$$

Замечание 2. Для асимптотического ряда возможны следующие варианты: а) ряд сходится к функции $f(t)$; б) ряд сходится, но не к функции $f(t)$; в) ряд расходится. Все три варианта реализуются (см. еще замечание 2 лекции 3).

Пример 1. Наиболее важные примеры асимптотических последовательностей дают степенные функции. Вот три примера: $(t^n), t \to 0; (t^{-n}), t \to \infty; (t-a)^n, t \to a$. Такие последовательности будем называть степенной асимптотической шкалой в окрестности соответствующей точки.

Пример 2. Из основных пределов (лекция 9, лекция 12) получаются следующие основные асимптотические разложения (при $x \to 0$):

$$1)\ \sin x = x + o(x);\ 2)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2);\ 3)\ \ln(1+x) = x + o(x);$$

$$4)\ a^x = 1 + x \ln a + o(x);\ 5)\ (1+x)^{\lambda} = 1 + \lambda x + o(x).$$

Пример 3. С помощью основных разложений из примера 2 можно вычислять многие пределы. Так, например $\left(x=\dfrac{1}{n}\to 0\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[9]{n+1}-\sqrt[9]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[9]{n}\left(\sqrt[9]{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[9]{n}\left(1+\frac{1}{9}\frac{1}{n}-1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=0.$$

Упражнение 1. Пусть $\alpha(x)\to 0$. Тогда:

1) $o(\alpha(x))+o(\alpha(x))=o(\alpha(x))$;

2) $o(\alpha(x))+O(\alpha(x))=O(\alpha(x))$;

3) $O(\alpha(x))+O(\alpha(x))=O(\alpha(x))$;

4) $o(o(\alpha(x)))=o(\alpha(x))$.

Указание. Напоминаем, эти равенства надо понимать как равенства между множествами функций.

Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение 8. Функция $f:X\to\mathbf{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x',x''\in X\ \left(|x'-x''|<\delta\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon\right).$$

Теорема 1 (*Кантор*). Если функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она является равномерно непрерывной на этом отрезке.

◀ Предположим, что функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ не является равномерно непрерывной на отрезке $X=[a,b]$. Тогда (советуем вспомнить правило переноса знака отрицания через кванторы из введения в анализ)

$$\exists\varepsilon_0>0\forall n\in N\ \exists x_n',x_n''\in X\left(\left|x_n'-x_n''\right|<1/n\wedge\left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geq\varepsilon_0\right).$$

Последовательность (x_n) ограничена. Значит, по теореме Больцано — Вейерштрасса (лекция 6) найдется некоторая подпоследовательность $(x_{k_n}')\to x_0\in[a,b]$. При этом

$$\left|x_{k_n}'-x_{k_n}''\right|<1/k_n\to 0,\ n\to\infty,$$

а тогда $(x_{k_n}'')\to x_0$. Из непрерывности функции $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ получим, что

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n}')=\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n}'')=f(x_0).$$

Но этот факт противоречит неравенству $\left|f(x_{k_n}')-f(x_{k_n}'')\right|\geq\varepsilon_0$.▶

Упражнение 2. Подумайте, почему доказательство будет неверно для интервала.

Пример 4. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на множестве $\mathbf{R}$. Рассмотрим следующие две последовательности точек: $x_n = n$, $x_n' = n + \frac{1}{n}$. Тогда $\left| x_n - x_n' \right| = \frac{1}{n}$, а $\left| f(x_n) - f(x_n') \right| > 1$. Поэтому и нет равномерной непрерывности.

***Задачи*:** 369, 371, 675, 699, 720, 731, 736, 741–742, 744.

ЧАВО

1. *Что такое асимптотическая формула?*

Суть асимптотической формулы в том, что сложную функцию в окрестности некоторой точки (или на некотором множестве) можно приближенно заменить более простой функцией. Определения 1–7 дают примеры асимптотических формул. Асимптотическое разложение — счетное множество асимптотических формул, таких, что каждая последующая уточняет предыдущую.

2. *Странное равенство:* $o(1) + o(1) = o(1)$?

Это равенство означает, что сумма двух бесконечно малых является бесконечно малой. Надо еще иметь в виду, что асимптотические равенства не являются симметричными. Так можно написать $o(1) = O(1)$, но нельзя писать $O(1) = o(1)$. Точнее было бы писать $o(1) \subset O(1)$, то есть бесконечно малые величины принадлежат классу ограниченных величин, но так не принято писать.

3. *Как понимать, что функция неравномерно непрерывна?*

Лучше (и правильнее!) будет говорить о функциях, которые не являются равномерно непрерывными, но непрерывны в каждой точке промежутка. У таких функций в каждой точке для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся разные $\delta > 0$, но среди них δ не будет наименьшего, а точнее их точная нижняя грань будет равна нулю.

4. *Что такое символы Ландау?*

Символы Ландау — это $O, o, \sim$.

ПЯТЬ ЗАПОВЕДЕЙ ДЛЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

- Предел функции и предел последовательности связаны критерием Гейне, но для доказательства существования предела функции надо просмотреть ВСЕ последовательности, которые сходятся к предельной точке, а для доказательства отсутствия предела функции достаточно найти ОДНУ расходящуюся последовательность.
- Надо знать важные пределы.
- Ищите неопределенности и избавляйтесь от них.
- Используйте композиции непрерывных функций.

- Применяйте важные асимптотические равенства.

ЛЕКЦИЯ 14

Производная. Односторонние производные. Связь непрерывности и дифференцируемости

Рассмотрим функцию $f: X \to \mathbf{R}$, X — промежуток. Обозначения:

$$y = f(x); x - x_0 = \Delta x = h; f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)(h) \equiv \Delta f.$$

Определение 1. Если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \qquad (1)$$

то он называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0. В научной и учебной литературе для производной используются разные обозначения: $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = y'(x_0)$.

Определение 2. Если существует

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f_+'(x_0), \qquad (2)$$

то он называется *правой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0, а предел

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f_-'(x_0) \qquad (3)$$

называется *левой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Замечание 1. Производная в точке существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают обе односторонние производные. Это утверждение следует из свойств односторонних пределов (лекция 7).

Замечание 2. Если $f_+'(x_0) = \pm\infty, f_-'(x_0) = \pm\infty$, то говорят, что соответствующая производная равна $\pm\infty$.

Пример 1. Рассмотрим линейную функцию $f_a(x) = ax + b$, для которой, пользуясь только определением, можно вычислить производную в любой точке области определения. Так как $\Delta f_a = a\Delta x$, то $f_a'(x) \equiv a$. В частности, производная постоянной функции во всех точках равна нулю $f_0'(x) \equiv 0$.

Функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, так как $f_+'(0) = 1$, а $f_-'(0) = -1$ (см. замечание 1).

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, когда справедливо представление

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0 \qquad (4)$$

для некоторой постоянной $A \in \mathbf{R}$.

Лемма 1. Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$.

◀ Формулу (4) можно записать в равносильной форме

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0$$

или в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Отсюда и следует требуемое.▶

Следствие 1. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке, так как из представления (4) следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Пример функции $f(x) = |x|$ показывает, что обратное утверждение неверно. Эта функция непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Касательная. Односторонние касательные

Рассмотрим дифференцируемую в точке $x_0 \in X$ функцию $f : X \to \mathbf{R}$.

Определение 4. Прямая линия, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называется *секущей* к графику функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке x_0 (в зависимости от выбора переменной x получим бесконечное множество секущих). Если x стремится к x_0, то получим прямую, заданную уравнением

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \qquad (5)$$

Такая прямая называется *касательной* к графику функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке x_0.

Определение 5. Прямые линии, которые задаются уравнениями

$$y = f'_+(x_0)(x - x_0) + f(x_0); y = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

называются, соответственно, *правой и левой касательными* к графику функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке x_0.

Замечание 3. Если $f'(x_0) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной* касательной в точке x_0.

Определение 6. Рассмотрим две линии, которые являются графиками дифференцируемых функций. Пусть эти линии пересекаются в точке $x = x_0$. *Углом* между такими линиями в точке пересечения называется угол между соответствующими касательными в точке пересечения.

Дифференциал

Определение 7. Пусть функция $f : X \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке x_0, тогда линейная функция $h \mapsto Ah\,(A = f'(x_0))$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0. Дифференциал обычно обозначают символом $df(x_0)$ или dy, если $y = f(x)$. При этом

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h. \tag{6}$$

Замечание 4. Теперь условие дифференцируемости (4) можно записать в следующем виде:

$$\Delta f(x_0)(h) = df(x_0)(h) + o(h), h \to 0. \tag{7}$$

Замечание 5. Поскольку для функции $y = x$ в любой точке дифференциал и сама функция совпадают, то принято обозначать ее дифференциал символом dx. Тогда формулу (6) часто записывают так:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{8}$$

Замечание 6. Пусть $y = S(t)$ — путь, который проходит материальная точка за время t. Тогда

$$\frac{S\;\;t+\Delta t\;\;-S\;\;t}{\Delta t} \text{ —}$$

средняя скорость за промежуток времени Δt, а производная $S'(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t (интересное обсуждение этого вопроса можно найти в книге [13]).

***Задачи*:** 650, 651, 653, 655, 657, 658, 795.

ЧАВО

1. *Какое понятие является первичным: скорость или производная?*

Я считаю, что мгновенную скорость надо определять как производную, а средняя скорость — чисто физическое понятие. Кстати, спросите работника ГАИ: «Какую скорость вы определяете?» Хотя лучше не спрашивать.

2. *Мне кажется, что касательная — это такая прямая, которая имеет с кривой одну общую точку.*

Если дать такое определение, то тогда многие кривые не имели бы касательных. Рассмотрите графики функций: $y = \sin x, y = x$.

3. *Я слышал, что дифференциал — это бесконечно малое приращение функции?*

Так иногда говорят, потому что дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях, когда приращение аргумента мало.

4. *В механике часто используется обозначение $\dot{x}$. Как его понимать?*

Если функция $x = x(t)$ зависит от времени, то часто пишут

$$\dot{x}(t) \equiv x'(t),\ \ddot{x}(t) \equiv x''(t).$$

Такие обозначения применял Ньютон.

ЛЕКЦИЯ 15

Арифметические операции над производными. Свойства дифференциала

Запишем условие дифференцируемости в несколько иной форме, чем в лекции 14.

Замечание 1. Введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

Тогда условие дифференцируемости функции f в точке x_0 равносильно непрерывности функции $\tilde{f}_{x_0}(x)$ в этой же точке. При этом

$$\tilde{f}_{x_0}(x_0) = f'(x_0). \qquad (2)$$

Допуская некоторую вольность в обозначениях (она часто встречается в учебниках и задачниках), мы иногда будем писать $f'(x) \equiv (f(x))'$.

Теорема 1. Если функции f, g дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке дифференцируемы сумма, разность, произведение и частное этих функций. При этом справедливы формулы:

$$f \pm g\ '(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0); \qquad (3)$$

$$fg\ '(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0); \qquad (4)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}; \ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}; \ g(x) \neq 0. \qquad (5)$$

◄ Достаточно доказать формулу (4) и первую из формул (5). С учетом замечания 5 можно написать

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{f}_{x_0}(x)(x - x_0); \ g(x) = g(x_0) + \tilde{g}_{x_0}(x)(x - x_0).$$

Если перемножить левые и правые части этих равенств, то получим

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \tilde{F}_{x_0}(x)(x - x_0),$$

где функция $\tilde{F}_{x_0}(x) = \tilde{f}_{x_0}(x)g(x_0) + \tilde{g}_{x_0}(x)f(x_0) + \tilde{f}_{x_0}(x_0)\tilde{g}_{x_0}(x_0)\ x - x_0$ непрерывна в точке x_0. Легко проверяется равенство $\tilde{F}_{x_0}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$. В силу замечания 1 формула (4) доказана. Далее

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)} = \tilde{G}_{x_0}(x)(x - x_0),$$

где функция $\tilde{G}_{x_0}(x) = \dfrac{-\tilde{g}_{x_0}(x)}{g(x_0)g(x)}$ очевидно непрерывна и справедливо равенство $\tilde{G}_{x_0}(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. Что и требовалось доказать.►

Следствие 1. Из теоремы 1 следуют аналогичные свойства для дифференциалов:

$$d(f \pm g) = df \pm dg; d(fg) = fdg + gdf;$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}; \;\; g(x) \neq 0.$$

Следствие 2. По индукции легко получить формулу

$$(f_1 f_2 \dots f_n)' = f'_1 f_2 \dots f_n + f_1 f'_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f'_n.$$

Здесь в каждом слагаемом правой части последовательно дифференцируется только один множитель.

Следствие 3. Из следствия 2 (см. еще пример 1 лекции 14) сразу получаем формулу $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Производная композиции функций. Производная обратной функции

Теорема 2 (производная композиции функций). Пусть выполняются условия: а) функция $x = f(t)$ дифференцируема в точке t_0 и $f'(t_0) = A$; б) функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = f(t_0)$ и $g'(x_0) = B$; в) определена функция $y = g(f(t))$ в окрестности точки t_0. Тогда функция $H(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t))$ дифференцируема в точке t_0 и справедлива формула

$$H'(t_0) = (g \circ f)'(t_0) = AB. \qquad (6)$$

◄ Из условий теоремы и замечания 1 следуют равенства

$$f(t) - f(t_0) = \tilde{f}_{t_0}(t)(t - t_0); g(x) - g(x_0) = \tilde{g}_{x_0}(x)(x - x_0).$$

Откуда получаем

$$g(f(t)) - g(f(t_0)) = \tilde{g}_{x_0}(f(t))\tilde{f}_{t_0}(t)(t - t_0) = \tilde{H}_{x_0}(t)(t - t_0),$$

где функция $\tilde{H}_{x_0}(t)$ непрерывна в точке t_0 и $\tilde{H}_{x_0}(t_0) = AB$. Теорема доказана.►

Теорема 3 (производная обратной функции). Пусть выполняются следующие условия: а) функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0; б) в окрестности точки x_0 существует непрерывная обратная функция $x = g^{-1}(y)$; в) $g'(x_0) \neq 0$. Тогда функция g^{-1} дифференцируема в точке y_0 и справедлива формула

$$\left(g^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{g'\;\; g^{-1}(y_0)}. \qquad (7)$$

◄ Доказательство следует из цепочки равенств

$$\frac{g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{1}{\tilde{g}_{x_0}(x)} = \frac{1}{\tilde{g}_{x_0}(g^{-1}(y))} = \tilde{G}_{y_0}(y).$$

Здесь функция $\tilde{G}_{y_0}(y)$ непрерывна в точке y_0 и $\tilde{G}_{y_0}(y_0) = \dfrac{1}{g'(x_0)}$ ►.

***Задачи*:** 823, 829, 977, 1010, 1014, 1015, 1019, 1021,1023.

ЧАВО

1. *Производная суммы равна сумме производных, а производная произведения не равна произведению производных?*

Если смотреть на операцию композиции как на своеобразное «произведение» функций, то получим, что производная «произведения» совпадет с произведением производных.

2. *Если функция является периодической, то будет ли производная периодической?*

Будет. Это следует из определения производной.

3. *Пусть функция является четной. Будет ли производная этой функции четной?*

Производная четной функции будет нечетной. Если $f(-x) \equiv f(x)$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{-h\to 0} -\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h} = -f'(-x).$$

ЛЕКЦИЯ 16

Производные элементарных функций

Вычислим несколько производных основных элементарных функций. Будем пользоваться их непрерывностью (лекция 12) и формулами тригонометрии.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Для косинуса можно воспользоваться формулой $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ и производной композиции функций (лекция 15). Тогда

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Используя формулу для производной обратной функции (лекция 15), получим следующее соотношение:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как справедлива формула

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для показательной функции получим (см. еще формулу (3) из лекции 12)

$$\left(a^x\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\ln a;\quad \left(e^x\right)' = e^x.$$

Из формулы для производной обратной функции следует

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Используя формулы из лекции 15, получим еще несколько производных:

$$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x};\ \left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\mathrm{arctg}x\right)' = \cos^2\left(\mathrm{arctg}x\right) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}x\right)} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\mathrm{ch}x\right)' = \mathrm{sh}x;\ \left(\mathrm{sh}x\right)' = \mathrm{ch}x;$$

$$\left(x^a\right)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = ax^{a-1}.$$

Замечание 1. Рассмотрим формулу (7) из лекции 14, то есть $\Delta f(x_0)(h) = df(x_0)(h) + o(h), h\to 0$. Допустим, что значение $f(x_0)$ вычисляется легко. Пусть еще приращение h достаточно мало. Тогда указанную формулу часто используют в приближенных вычислениях. А именно

$$\Delta f(x_0)(h) \approx df(x_0)(h) \Rightarrow f\left(x_0+h\right) \approx f(x_0) + df\left(x_0\right)\left(h\right). \qquad (*)$$

Продемонстрируем применение формулы (*) на конкретном примере. Пусть надо вычислить $\sqrt{0,96}$. Здесь мы выберем следующие обозначения: $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt{1+x}$, $h = -0,04$. Тогда $df\left(x_0\right)\left(h\right) = \frac{1}{2}\left(1+x_0\right)^{-1/2}h$. Наконец, $\sqrt{0,96} = f\left(-0,04\right) \approx 1-\frac{1}{2}0,04 = 0,98$.

Пример 1. Пусть $f(x)$ $\left(f(x)>0\right)$ и $g(x)$ две дифференцируемые функции. Тогда

$$\left(f^g\right)' = \left(e^{g\ln f}\right)' = e^{g\ln f}\left(g\ln f\right)' = f^g\left(g'\ln f + g\frac{f'}{f}\right) = g' f^g \ln f + f' g f^{g-1}.$$

Упражнение 1. Попробуйте вычислить приближенно $\sin 31^\circ$, если $f(x) = \sin x;\ x_0 = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236;\ h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745$.

Упражнение 2. По воспоминаниям австралийского физика М. Олифанта, Резерфорд прекрасно владел техникой счета. Чтобы возвести в квадрат число Авогадро $6,0248\times 10^{23}$, он умножал 6 на 6,05 и получал хорошее приближение $36,30\times 10^{46}$. Обоснуйте его способ вычислений.

Вектор-функции

Определение 1. Пусть каждому t из промежутка X соответствует радиус-вектор $\vec{r}(t)$ трехмерного (двумерного) пространства. Тогда будем говорить, что задана *вектор-функция* $\vec{r}: X \to \mathbb{R}^3\ (\mathbb{R}^2)$ скалярного аргумента.

Замечание 2. В стандартном базисе пространства $\mathbf{R}^3$ задание вектор-функции равносильно заданию трех скалярных функций, то есть

$$\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{i} + x_2(t)\vec{j} + x_3(t)\vec{k},\ t \in X,$$

или более кратко

$$\vec{r}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right),\ t \in X.$$

Определение 2. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом* вектор-функции $\vec{r}(t)$ при t, стремящемся к t_0, если

$$\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0. \tag{1}$$

Обозначения: $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$; $\vec{r}(t) \to \vec{r}, t \to t_0$.

Лемма 1. Пусть $\vec{r}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Тогда

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x_1(t) = x_0^1, \\ \lim\limits_{t\to t_0} x_2(t) = x_0^2, \\ \lim\limits_{t\to t_0} x_3(t) = x_0^3. \end{cases}$$

◄ Доказательство следует из неравенств

$$| x_k(t) - x_0^k | \le |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| \le \sum_{i=1}^{3} | x_i(t) - x_0^i |,\ k = 1, 2, 3$$

и определений соответствующих пределов.►

Определение 3. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Определение 4. Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ называется предел

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t). \tag{2}$$

Замечание 3. Справедливо равенство

$$\vec{r}\,'(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)\right), \tag{3}$$

которое следует из леммы 1.

***Задачи*:** 1055, 1060, 1062, 1083, 1099, 1101, 1105.

ЧАВО

1. *Показательная функция не меняется при дифференцировании. Есть ли еще такие функции?*

Ваш вопрос, на языке математики, относится к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Значит, надо уметь решать уравнение $f'(x) = f(x)$. Со временем вы научитесь решать такие и более сложные дифференциальные уравнения. Кстати, все решения указанного дифференциального уравнения имеют вид $f(x) = ce^x$.

2. *Пытался найти функцию, которая дифференцируема в каждой точке интервала и имеет разрывы первого рода. Не нашел.*

Такой функции вам не удастся найти. Смотрите лемму Дарбу (лекция 18).

3. *Почему гиперболический синус совершенно не похож на тригонометрический синус, а формулы для них имеют много общего?*

Достаточно добавить мнимую единицу, то есть перейти в область комплексного анализа, и все станет понятно. Комплексный анализ у вас будет позже.

ЛЕКЦИЯ 17

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Уже знакомую нам производную $f'(x)$ называют также производной первого порядка (первой производной) и обозначают символом $f^{(1)}(x) \equiv f'(x)$. Если производная первого порядка является дифференцируемой, то ее производную $(f')'(x) = f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$ будем называть производной второго порядка (второй производной). По индукции определяются производные третьего и других порядков, то есть

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x),\ n \in N.$$

Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующее обозначение: $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

Теорема 1 (*Лейбниц*). Пусть функции f, g имеют производные n-го порядка. Тогда справедлива формула (правило) Лейбница

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)};\ C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{1}$$

◄ Эта формула доказывается по индукции. Достаточно обосновать только последний шаг индукции, но он следует из цепочки равенств (в третьем равенстве индексы в сумме сдвигаем на единицу и записываем последнее слагаемое $k = n+1$ отдельно от сумм):

$$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + gf^{(n+1)} + fg^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

При этом мы воспользовались известными свойствами биномиальных коэффициентов: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ (введение в анализ).▶

Пример 1. Для того чтобы пользоваться формулой Лейбница, надо знать несколько формул для производных любого порядка от элементарных функций. Приведем три примера, которые легко доказать методом математической индукции.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad (x^a)^{(n)} = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(a-k)\right)x^{a-n}.$$

С производными n-го порядка тесно связаны дифференциалы n-го порядка. Известный нам дифференциал (лекция 14) называют также первым дифференциалом (дифференциалом первого порядка) и используют обозначение $d^1 f \equiv df$. Напомним, что дифференциал зависит от двух переменных: x, $dx \equiv h$. По переменной h дифференциал является линейной функцией, а зависимость от переменной x может быть достаточно сложной. Будем считать, что дифференциал является функцией от переменной x, а h является параметром. Тогда может существовать дифференциал от функции $df(x)h$, то есть $d(df(x)) = d(f'(x)h) = f''(x)hh_1$. Пусть $h_1 = h$. Обозначим

$$d^2 f(x)h^2 = f''(x)h^2 = f''(x)dxdx \equiv f''(x)dx^2.$$

Итак, появилась новая функция $d^2 f$ $(d^2 f(x,h) = f''(x)h^2)$, которую называют *вторым дифференциалом*. Если существует третья производная, то аналогично (по переменной x) получаем *третий дифференциал* $d^3 f$ $(d^3 f(x,h) = f'''(x)h^3)$. По индукции n-й *дифференциал* $d^n f = d(d^{n-1} f)$ определяется следующей формулой:

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)h^n. \qquad (2)$$

Замечание 1 (об инвариантности формы дифференциала). Запишем первый дифференциал функции $y = f(x)$ в виде $dy = f'(x)dx$. Пусть $x = g(t)$. Рассмотрим сложную функцию $y = f(g(t)) = \tilde{f}(t)$. Тогда

$$dy = \tilde{f}'(t)dt = f'(g(t))g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Получилось, что форма первого дифференциала не изменилась после замены независимой переменной. В этом случае говорят об *инвариантности формы* первого дифференциала. Простые примеры $(f(t^2))$ показывают, что второй и следующие дифференциалы не являются инвариантными. Есть, правда, одно исключение, когда $g(t) = at + b$ является линейной функцией. В этом случае, легко видеть, что все дифференциалы обладают свойством инвариантности формы.

Производные функций, заданных параметрически и неявно

Пусть дана система

$$\begin{cases} x = s(t), \\ y = b(t), \end{cases} \qquad (*)$$

где $t \in [0, T]$. Если функция $x = s(t)$ имеет обратную $t = s^{-1}(x)$ (например, когда эта функция строго возрастает или убывает), то можно составить композицию $y = b(s^{-1}(x)) \equiv F \;\; x$. В этом случае говорят, что система $(*)$ задает функцию y от переменной x параметрически. В механике систему уравнений $(*)$ называют кинематическими уравнениями плоского движения.

Используя формулы для производной сложной функции и обратной функции, находим

$$F'(x) = \frac{b'(s^{-1}(x))}{s'(s^{-1}(x))} \Rightarrow F'(s(t)) = \frac{b'(t)}{s'(t)} = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируя предыдущее соотношение еще раз, получим

$$F''(x) = \frac{b''(s^{-1}(x)) - b'(s^{-1}(x))\dfrac{s''(s^{-1}(x))}{s'(s^{-1}(x))}}{s'(s^{-1}(x)) \;\; ^2} \Rightarrow F''(s(t)) = \frac{b''(t)s'(t) - b'(t)s''(t)}{s'(t)^3}.$$

Для приложений в механике обычно этих двух производных достаточно.

Замечание 2. Встречаются «функции-шпионы». Их называют функциями, заданными неявно. Говорят, что функция $y = f(x), x \in X$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, когда $\forall x \in X (F(x, f(x)) \equiv 0)$. Если понадобятся производные функции, заданной неявно, то указанное тождество дифференцируют нужное число раз и находят требуемые производные. Отметим, что даже первая производная будет выражаться через исходную функцию.

Например, рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Если это уравнение задает неявно дифференцируемую функцию $y = f(x)$, то получим тождество

$$x^2 + f(x)^2 \equiv 1.$$

Дифференцируя это тождество, получим $2x + 2f(x)f' \;\; x \;\; \equiv 0$. Откуда находим производную

$$f' \;\; x \;\; = -\frac{x}{f \;\; x}.$$

***Задачи*:** 839, 845, 858, 860, 864, 875, 885, 895, 901, 913, 926, 934, 958, 961.

ЧАВО

1. *В чем суть правила Лейбница?*

Не надо быть Лейбницем, чтобы сообразить, что в формуле для производной $fg^{\ n}$ должны встречаться только слагаемые следующего вида: $f^{\ k} g^{\ n-k}$. Суть правила Лейбница в том, СКОЛЬКО таких слагаемых будет в формуле. Оказалось, что их количество совпадает с соответствующим биномиальным коэффициентом.

2. *Рассмотрим равенство* $x^2 + y^2 = -1$. *Оно не задает неявной функции, но можно найти производную* $y' = -\dfrac{x}{y}$. *Как так может быть?*

Прежде чем считать производную неявной функции, надо убедиться, что есть хотя бы одна пара (x, y), которая удовлетворяет неявному уравнению. Если такой пары нет, то считать производную не имеет смысла. Подробнее все вопросы, которые связаны с неявными функциями, мы обсудим позже (теорема о неявной функции).

ЛЕКЦИЯ 18

Возрастание и убывание функций в точке. Локальный экстремум

Пусть дана функция $f : X \to \mathbf{R}$. Введем обозначения: $x_0 \in X$, $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции, $\dot{U}_\delta\ x_0 = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ — проколотая δ-окрестность точки x_0. Вспомните еще функцию $\operatorname{sgn} x$ (лекция 10).

Определение 1. Функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется *возрастающей в точке* x_0, если найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta\ x_0$ выполняется равенство

$$\operatorname{sgn} \Delta x = \operatorname{sgn} \Delta f. \tag{1}$$

Функцию $f : X \to \mathbf{R}$ назовем *убывающей в точке* x_0, если найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta\ x_0$ выполняется равенство

$$\operatorname{sgn} \Delta x = -\operatorname{sgn} \Delta f. \tag{2}$$

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*строгого локального максимума*), если найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta\ x_0$ выполняется неравенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0\ (\Delta f = f(x) - f(x_0) < 0).$$

Определение 3. Точку x_0 называют *точкой локального минимума* (*строгого локального минимума*), если найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta\ x_0$ выполняется неравенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \ge 0\ (\Delta f = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Определение 4. Точка локального минимума или локального максимума называется точкой *локального экстремума*, а значение функции в такой точке называется *экстремумом функции*.

Сформулируем одно достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции.

Теорема 1. Пусть функция $f: X \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливы два утверждения:
если $f'(x_0) > 0$, то функция *f* возрастает в точке x_0;
если $f'(x_0) < 0$, то функция *f* убывает в точке x_0.

◀ Достаточно доказать первое утверждение. Пусть $f'(x_0) = \gamma > 0$.
Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \gamma.$$

Полагаем $\varepsilon = \gamma/2$. Найдем δ, такое, что для всех $x \in \dot{U}_\delta\ x_0$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \gamma \right| < \gamma/2 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \gamma/2 \Rightarrow \operatorname{sgn} \Delta f = \operatorname{sgn} \Delta x.$$

Второе утверждение следует из первого, если взять $f_1(x) = -f(x)$.▶

Важные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа

Везде далее в этом разделе все функции $f, g, ...$ заданы на отрезке $[a,b]$ и непрерывны на этом отрезке.

Теорема 2 (*Ферма*). Пусть $x_0 \in (a,b)$ и точка x_0 является точкой экстремума функции $f:[a,b] \to \mathbf{R}$. Если существует производная функции f в точке x_0, то

$$f'(x_0) = 0.$$

◀ Рассмотрим три возможности: $f'(x_0) > 0, f'(x_0) < 0, f'(x_0) = 0$. В силу условий теоремы Ферма и по теореме 1 остается только третья возможность. ▶

Определение 5. Точки x_0, в которых $f'(x_0) = 0$, будем называть *стационарными* точками функции f.

Замечание 1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$ надо искать среди точек трех типов: стационарных точек; точек, где функция не дифференцируема; граничных точек a, b.

Если теорема Ферма является локальным результатом (важно как ведет себя функция в некоторой окрестности данной точки), то следующие результаты теорем являются глобальными (результат зависит от поведения функции на всем отрезке).

Теорема 3 (*Ролль*). Пусть функция $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$f'(c) = 0.$$

◀ Для постоянной функции этот результат очевиден. Пусть теперь функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ не является постоянной. Тогда по теореме Вейерштрасса (лекция 11) функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ достигает наибольшего M и наименьшего m значений. Причем $m\neq M$. Значит, одно из этих значений (оно будет точкой локального экстремума) достигается на интервале (a,b). Осталось применить теорему 2.▶

Теорема 4 (*Коши*). Рассмотрим две функции f,g. Предположим, что обе функции дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$. Тогда найдется точка $c\in(a,b)$, такая, что

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (3)$$

◀ Введем вспомогательную функцию

$$K(x)=(f(a)-f(b))g(x)-(g(a)-g(b))f(x).$$

Легко заметить, что для функции $K(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $K(a)=K(b)$. Поэтому $\exists c\in(a,b)$, что справедливо соотношение

$$K'(c)=(f(a)-f(b))g'(c)-(g(a)-g(b))f'(c)=0.$$

Откуда и следует равенство (3). ▶

Теорема 5 (*Лагранж*). Если функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ дифференцируема на интервале (a,b), то $\exists c\in(a,b)$, что справедливо равенство

$$f(a)-f(b)=f'(c)(a-b). \qquad (4)$$

Эту формулу называют: *формула Лагранжа*, *формула конечных приращений*, *теорема о среднем значении*. В данном разделе это самая важная формула.

◀ Если взять $g(x)\equiv x$, то теорема Лагранжа будет частным случаем теоремы 4. ▶

Следствие 1. Формулу (4) можно записывать в следующем виде:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),\theta\in(0,1). \qquad (5)$$

Следствие 2. Если производная $f'(x)\equiv 0$ на некотором промежутке, то функция f является постоянной.

◀ Из теоремы Лагранжа следует, что $\forall x_1,x_2$ справедливо равенство $f(x_1)-f(x_2)=0$.▶

Следствие 3. Если $F'(x)\equiv G'(x)$ на некотором промежутке, то $F(x)\equiv G(x)+c$, где c — постоянная.

◀ Полагаем $F(x)-G(x)=f(x)$. Осталось применить следствие 2. ▶

Лемма 1 (*Дарбу*). Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ дифференцируема на интервале (a,b). Для $c,d\subset(a,b)$ обозначим $C=f'(c),D=f'(d)$. Тогда производная $f'(x)$ принимает любое значение между C и D.

◀ Пусть, например, $D<\lambda<C$. Рассмотрим функцию $F\ x\ =f\ x\ -\lambda x$. Тогда $F'\ c\ =C-\lambda>0,F'\ d\ =D-\lambda<0$. Тогда функция F возрастает в точке c справа и убывает в точке d слева. Значит, внутри отрезка $[c,\ d]$ есть значение функции $F(x)$, которое больше, чем значения на концах этого отрезка. Итак, внутри интервала (c, d) найдется точка α, в которой функция $F(x)$ принимает максимальное значение. Тогда $F'(\alpha) = f'(\alpha) - \lambda = 0$. Это значит, что производная $f'(x)$ принимает значение λ. Случай $C < \lambda < D$ рассматривается аналогично, но для минимума внутри интервала (c, d).►

Задачи: 987, 1034, 1039, 1044, 1048, 1054, 1135.

ЧАВО

1. *Возрастание функции в точке и возрастание функции в окрестности этой точки — это одинаковые понятия?*

Это разные понятия. Возрастание функции в окрестности этой точки равносильно возрастанию функции в каждой точке окрестности.

2. *Наибольшее значение функции на отрезке всегда достигается в точках локального максимума?*

Не всегда. Наибольшее значение может достигаться на концах отрезка.

3. *В теореме Лагранжа и Коши фигурирует некоторая точка c. Как ее найти?*

В общем случае этого никто не знает. Кстати, теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Найдется точка (не обязательно одна) на графике, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

ЛЕКЦИЯ 19

Правило Лопиталя

Есть метод (правило Лопиталя) для раскрытия неопределенностей следующего вида: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$. Вначале мы докажем аналогичное правило (лемма Штольца) для последовательностей.

Лемма 1 (*лемма Штольца*). Пусть положительная, возрастающая последовательность (y_n) является бесконечно большой. Если существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

◄ Можно считать, что $l = 0$. В противном случае надо рассмотреть две последовательности: $X_n = x_n - l y_n$ и $Y_n = y_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{n+1} - X_n}{Y_{n+1} - Y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l = 0,$$

и
$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{Y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-ly_n}{y_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l.$$
Итак, полагаем $l=0$. Тогда $x_{n+1}-x_n=\alpha_n(y_{n+1}-y_n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Следовательно, $\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n\ge N(|\alpha_n|<\varepsilon/2)$. Рассмотрим систему равенств:
$$\begin{cases} x_{N+1}-x_N=\alpha_N(y_{N+1}-y_N);\\ x_{N+2}-x_{N+1}=\alpha_{N+1}(y_{N+2}-y_{N+1}));\\ \dots\\ x_{n+1}-x_n=\alpha_n(y_{n+1}-y_n).\end{cases}$$
Складывая все равенства этой системы, получим
$$x_{n+1}=x_N+\sum_{k=N}^{n}\alpha_k(y_{k+1}-y_k).$$
Итак,
$$|x_{n+1}|\le|x_N|+\sum_{k=N}^{n}|\alpha_k||y_{k+1}-y_k|\le|x_N|+\frac{\varepsilon}{2}(y_{n+1}-y_N).$$
В последнем неравенстве мы воспользовались возрастанием последовательности (y_n). Следовательно,
$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right|\le\frac{|x_N|}{y_{n+1}}+\frac{\varepsilon}{2},\forall n>N.$$
Так как последовательность (y_n) бесконечно большая, то найдется N_1, что для всех $n>N_1$ выполняется неравенство $\frac{|x_N|}{y_{n+1}}<\frac{\varepsilon}{2}$. Значит, при $n>\max(N,N_1)$ справедливо неравенство $\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right|<\varepsilon.$ Осталось вспомнить определение предела последовательности. ►

Упражнение 1. Найдите предел последовательности
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}},p>0.$$

Теорема 1 (*правило Лопиталя* $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $g:(a,b)\to\mathbf{R}$ дифференцируемы в правой полуокрестности точки a и там же выполняются условия:
$$1)\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0;\ 2)\ g'(x)\ne0;\ 3)\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$
Тогда
$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.\qquad(1)$$

◀ Продолжим функции f, g по непрерывности в точку a справа, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Тогда по теореме Коши (лекция 18) для $x \in (a, a+\delta)$ получаем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.▶

Замечание 1. Понятно, что с соответствующими изменениями в условиях, теорема справедлива и для базы $x \to b - 0$. Для случая базы $x \to \infty$ аналогичная теорема также верна. Достаточно сделать замену $x = 1/t$.

Теорема 2 (*правило Лопиталя* $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $g : (a, b) \to \mathbf{R}$ дифференцируемы в правой полуокрестности точки a и там же выполняются условия:

$$1) \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = +\infty;\ 2) g'(x) \neq 0;\ 3) \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \tag{2}$$

◀ Из условий 1, 2 следует, что функция g строго убывает в правой окрестности точки a. Рассмотрим последовательность $(x_n) \downarrow a$. Тогда по теореме Коши (лекция 18) получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L.$$

Теперь из леммы 1 следует равенство

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

Осталось применить критерий Гейне (лекция 7).▶

Асимптоты

Определение 1. Прямая $y = kx + b$ называется (*наклонной* при $k \neq 0$) *асимптотой* к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \quad .$$

Лемма 2. Асимптота к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k;\ \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

◀ Из определения асимптоты вытекает соотношение:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(kx+b)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

Остальное очевидно.▶

Замечание 2. Справедливо аналогичное утверждение и для асимптоты к графику при $x\to-\infty$.

Замечание 3. Если $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\pm\infty;\ \lim\limits_{x\to a-}f(x)=\pm\infty$, то говорят, что в точке a график функции $y=f(x)$ имеет *вертикальную асимптоту*.

***Задачи*:** 1140, 1158, 1163, 1169, 1190, 1195, 1197, 1206, 1211, 1251.

ЧАВО

1. *Зачем доказывать отдельно два правила Лопиталя? Можно ведь доказать правило Лопиталя для случая неопределенности 0/0, а потом, для неопределенности ∞/∞, воспользоваться преобразованием* $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Такое доказательство не проходит. Так как после дифференцирования получим $\lim\limits_{x\to a+}\frac{1/g(x)}{1/f(x)}=\lim\limits_{x\to a+}\frac{g'(x)/g^2(x)}{f'(x)/f^2(x)}$. Теперь надо знать предел $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$, а оно-то нам и не известен.

2. *Правило Лопиталя применять удобно. Бывает ли так, что оно не помогает?*

Попробуйте применить правило Лопиталя к простому пределу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. *Верно ли я думаю: «Асимптота — это прямая, к которой приближается график, никогда не пересекая его»?*

Это не совсем так. По нашему определению прямая $y=0$ является асимптотой к графику функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

4. *Может ли парабола быть асимптотой некоторой функции?*

Может. Надо только дать соответствующее определение. Например, парабола $y=ax^2+bx+c$ называется *асимптотической параболой* к графику функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax^2+bx+c))=0.$$

5. *Нашел предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$, *но* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ *не существует. Значит, правило Лопиталя не верно?*

Правило Лопиталя не симметрично, если существует предел $\lim\limits_{\text{в}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{\text{в}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\text{в}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Когда же существует предел $\lim\limits_{\text{в}} \frac{f(x)}{g(x)}$, то о пределе $\lim\limits_{\text{в}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ нельзя сказать ничего определенного.

ЛЕКЦИЯ 20

Первообразная. Неопределенный интеграл

В этом разделе все функции $f, g, F, G, \dots$ заданы на промежутке (a,b).

Определение 1. Функция F называется *первообразной* функции f, если в каждой точке $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Лемма 1. Если две функции $F_1(x), F_2(x)$ являются первообразными функции $f(x)$, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на (a,b).

◄ Полагаем $F_1(x) - F_2(x) = F(x)$. Тогда $F'(x) \equiv 0$. По следствию 2 из лекции 18 получим требуемый результат.►

Определение 2. Непрерывная функция F называется *обобщенной первообразной* функции f, если равенство $F'(x) = f(x)$ может нарушаться лишь в конечном множестве точек (не исключается случай, когда производная не существует в некоторых таких точках).

Замечание 1. Нетрудно установить, что и для обобщенных первообразных справедлива лемма 1. Надо только иметь в виду следующий факт: кусочно-постоянная функция либо разрывна, либо является постоянной. Дальнейшие результаты, если не оговорено противное, справедливы и для обобщенных первообразных.

Пример 1. Для функции $y = \operatorname{sgn} x$ обобщенной первообразной является функция $y = |x|$.

Определение 3. Множество всех первообразных (обобщенных первообразных) F функции f называется *неопределенным интегралом* функции f и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что можно писать

$$\int f(x)dx = \{F(x)\} = F(x) + c.$$

Имейте в виду, что последняя запись общепринятая, но может вызвать недоразумения. Надо помнить, что неопределенный интеграл — *множество* первообразных, и все равенства с неопределенными интегралами надо понимать как равенства соответствующих множеств.

Сформулируем несколько простых, но полезных свойств неопределенного интеграла. Эти свойства являются прямым следствием определения и свойств производных.

Свойство 1.

$$\int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Свойство 2.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Свойство 3.

$$\int df = f(x) + c.$$

Свойство 4.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Свойство 5. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$$

Свойство 6. Пусть $F(x)$ первообразная функции $f(x)$. Тогда (советуем запомнить!)

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c.$$

Приведем список основных первообразных элементарных функций. Проверка производится дифференцированием первообразных.

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$; 2) $\displaystyle\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c, \mu \neq -1$; 3) $\displaystyle\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c, a \neq 1$;

4) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$; 5) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$; 6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$;

7) $\int \sin x dx = -\cos x + c$; 8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$; 9) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$;

10) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ a \neq 0$; 11) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a > 0$;

12) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$; 13) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, a > 0$.

Интегрирование по частям. Замена переменных

Теорема 1. Пусть функции u, v дифференцируемы на интервале (a, b) и существует первообразная функции $u'v$. Тогда функция uv' имеет первообразную и справедлива формула (интегрирования по частям)

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx. \qquad (1)$$

◄ Вычислим производную правой части равенства (1):

$$\left(uv - \int u'vdx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv'.$$

Осталось вспомнить определение первообразной.►

Замечание 3. Формулу интегрирования по частям (1) кратко записывают в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Теорема 2. Пусть функция $F:(a,b)\to\mathbf{R}$ является первообразной функции $f:(a,b)\to\mathbf{R}$. Рассмотрим дифференцируемую функцию $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$. Тогда справедлива формула (замены переменной)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c. \quad (2)$$

◄ Вычисляем производную правой части формулы (2).

$$\left(F(\varphi(t)) + c\right)' = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Что и требовалось. ►

Замечание 4. Если функция $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ взаимно однозначная, то формулу (2) можно записать в виде

$$\int f(x)\,dx = \left.\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (3)$$

Упражнение 1. Доказать рекуррентную формулу

$$I_{n+1} \equiv \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) I_n, n\in\mathbb{N}.$$

<u>Указание</u>. Проинтегрировать по частям.

Пример 2. Рассмотрим следующие интегралы:

$$\int e^x \cos xdx, \quad \int e^x \sin xdx.$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$I_s = \int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx = -e^x \cos x + \int e^x d\sin x =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I_s.$$

Откуда находим

$$I_s = \int e^x \sin xdx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$I_c = \int e^x \cos xdx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

***Задачи*:** 1320, 1331, 1336–1338, 1341, 1348, 1355, 1359, 1374.

ЧАВО

1. *Зачем нужна обобщенная первообразная? В большинстве учебников фигурирует первообразная, а обобщенной первообразной нет.*

Главный результат, для которого нужна первообразная, это теорема Ньютона — Лейбница. Оказалось, что указанная теорема справедлива и для обобщенных первообразных. Надо только иметь в виду обязательную непрерывность обобщенной первообразной. Чаще всего обобщенную первообразную «склеивают» из «кусков» гладких первообразных.

2. *Первообразная и неопределенный интеграл — это разные понятия?*

Неопределенный интеграл — это множество всех первообразных (обобщенных первообразных) данной функции. Правда, оказывается, что все первообразные данной функции отличаются на постоянную. Поэтому неопределенный интеграл полностью определяется одной из первообразных.

3. *Если мне известна первообразная функции* $\cos x$*, то как мне найти первообразную функции* $\cos 3x$*?*

Из свойства 6 неопределенного интеграла получаем, что аргумент первообразной функции $\cos x$ надо увеличить в три раза и добавить впереди множитель, равный 1/3. Получим $\frac{1}{3}\sin 3x$.

4. *Что такое неберущиеся интегралы?*

Неберущимися интегралами называются неопределенные интегралы, которые не имеют первообразной в виде элементарной функции. Кстати, доказательство того факта, что интеграл является неберущимся, обычно довольно сложно. Заметим, что неберущиеся интегралы ничем не хуже остальных. С ними прекрасно можно работать.

5. *Я построил таблицу первообразных так. Написал в строке несколько функций. В следующей строке написал их производные. Затем поменял местами строки. Получилась таблица первообразных.*

Прекрасно. Только в этой таблице могут быть первообразные сложных функций, а простых и важных не будет.

Примеры вариантов двух коллоквиумов.

Коллоквиум № 1. «Предел числовой последовательности»

Вариант

1. Всякая ли последовательность удовлетворяет условию: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists A > 0\ \left| x_n \right| \le A$,
2. Существует ли сходящаяся последовательность из целых чисел?
3. Может ли расходится частное двух сходящихся последовательностей $\left(\dfrac{x_n}{y_n} \right)$? При каком условии это может быть?
4. Верно ли утверждение: если x_n бесконечно малая последовательность, то в любой окрестности точки $a = 0$ находится бесконечное множество членов этой последовательности.
5. Верно ли утверждение, что любая неограниченная последовательность является бесконечно большой?
6. Верно ли утверждение: любая система вложенных интервалов $a_{n+1}, b_{n+1} \subset a_n, b_n$; $n = 1, 2, \ldots$ имеет непустое пересечение?
7. Обязательно ли сходится последовательность x_n , если её подпоследовательности x_{2n+1} и x_{2n} сходятся?
8. Существует ли последовательность, которая содержит подпоследовательности, сходящиеся к заданным m числам $a_1, a_2, \ldots, a_m$?
9. Сформулируйте в положительном смысле (не использовать знак отрицания), используя кванторы $\forall, \exists$ следующее утверждение: «последовательность x_n не является возрастающей».

Коллоквиум № 2. «Функции многих переменных»

Вариант

1. 1. Может ли множество быть одновременно не открытым и не замкнутым?
2. Обязательно ли существует предел функции $f(x, y)$ в точке, если существуют повторные пределы в этой точке?
3. Справедливо ли утверждение: непрерывная на некотором множестве функция достигает на этом множестве своих точных границ?
4. Существует ли функция многих переменных, непрерывная только в одной точке?
5. Будет ли равномерно непрерывна в области $D = (x, y):\ x^2 + y^2 < 2$ функция $f(x, y) = x^2 - xy + 3y^2$?

6. Может ли разрывная в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ иметь в этой точке частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$?
7. Существует ли функция $f(x, y)$, у которой $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = y - x$?
8. Существует ли функция многих переменных, дифференцируемая только в заданных *n* точках?
9. Может ли функция $f(x, y)$, имеющая экстремум в точке (x_0, y_0), удовлетворять условиям: $f_x^{'}(x_0, y_0)$=0, а $f_y^{'}(x_0, y_0)$ – не существует?

Экзаменационная программа по математическому анализу

1. Бином Ньютона. Точные границы числовых множеств.
2. Комплексные числа.
3. Предел последовательности.
4. Монотонные последовательности. Число *e*.
5. Два определения предела функции и их равносильность.
6. Свойства пределов функций.
7. Символы Ландау.
8. Замечательные пределы.
9. Непрерывные функции.
10. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.
11. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
12. Дифференциал. Основные правила дифференцирования.
13. Производные и дифференциалы высших порядков.
14. Дифференциальные теоремы о среднем.
15. Правило Лопиталя.
16. Формулы Тейлора элементарных функций.
17. Признаки монотонности функции.
18. Локальный и глобальный экстремумы.
19. Выпуклость кривой и точки перегиба.
20. Первообразная и неопределенный интеграл.
21. Интегрирование рациональных дробей.
22. Основные методы интегрирования.
23. Свойства определенного интеграла.
24. Оценки интегралов. Теоремы о среднем.
25. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
26. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
27. Простейшие свойства несобственных интегралов.
28. Признаки сходимости несобственных интегралов.
29. Основные свойства сходящихся рядов.
30. Признаки абсолютной сходимости.

31. Знакочередующиеся ряды и теорема Лейбница.
32. Функциональные последовательности и ряды.
33. Степенные ряды.
34. Ряды Тейлора элементарных функций.
35. Предел функции многих переменных.
36. Частные производные. Дифференцируемые функции.
37. Производные и дифференциалы сложных функций.
38. Производные и дифференциалы высших порядков.
39. Формула Тейлора для функций многих переменных.
40. Экстремумы функций многих переменных.
41. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства.
42. Непрерывность интегралов, интегрирование и дифференцирование по параметру.
43. Интегралы Эйлера.

Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1

1. Интегральные суммы. Интеграл Римана. Суммы Дарбу.
2. Бином Ньютона.
3. Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$
4. Построить график функции $y = \sin x \cos 2x$

Билет № 2

1. Знакочередующиеся ряды и теорема Лейбница.
2. Свойства пределов функций.
3. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$
4. Найти $d^2 f(1,2)$, если $f(x,y) = x^3 + y^3$.

Глоссарий важных понятий

Отрезок и интервал
Действительные числа
Координатная прямая и координатная плоскость
Полярные координаты
Множество
Комплексные числа
Мнимая единица
Верхняя и нижняя грани числового множества
Квантор
Достаточное и необходимое условия
Функция

Последовательность
Подпоследовательность
Предел
Приращение функции
Дифференциал
Производная
Локальный минимум и максимум
Экстремум
Выпуклость и вогнутость
Первообразная
Интеграл Римана или определенный интеграл
Несобственный интеграл
Область
Частная производная
Числовой и функциональный ряды
Степенной ряд

Рекомендации по использованию списка литературы.

Для изучения вводной части анализа полезно обратиться к учебным пособиям [1, 4, 6, 8]. По основной части курса есть много хороших и доступных учебников и учебных пособий, из которых можно рекомендовать [4, 5, 7, 8, 9, 10, 11]. Большое количество задач разного уровня сложности можно найти в [2, 3, 8]

Список литературы

1. Высшая математика. Сборник задач. Часть 1. БГУ, 2013. http://elib.bsu.by/handle/123456789/91377
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1995.
3. Вышэйшая матэматыка у прыкладах і задачах. Ч. 1. Мінск, 2007.
4. Ильин, В.А. Основы математического анализа. Ч. 1 М.: Физматлит, 2009.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 ч. М.: Физматлит, 2009.
6. Кашевский В.В. Математический анализ. Курс лекций. БГУ. Минск. 2008.
7. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа М.: Наука, 1989.
8. Математический анализ в вопросах и задачах. В. Ф. Бутузов и др. М., 2001.
9. Русак В., Шлома Л., Ахраменка В., Крачкоускі А. Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай. Мінск, 1994
10. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа М.:

Бином. Лаборатория знаний, 2009.
11. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2 т. М., 1955.
12. Чупригин О. А. Математический анализ: предел, непрерывность, дифференцируемость. БГУ. Минск, 2010.

ТИПОВАЯ ПРОГРАММА КУРСА

Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь
________________ А.И. Жук
____

Регистрационный № ТД-______/тип.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовая учебная программа
для учреждений высшего образования по специальности
1-31 04 01 Физика (по направлениям),
направлениям специальности
1-31 04 01-02 Физика (производственная деятельность),
1-31 04 01-03 Физика (научно-педагогическая деятельность),
1-31 04 01-04 Физика (управленческая деятельность)

СОГЛАСОВАНО
Председатель Учебно-методического
объединения по
естественнонаучному образованию
________________ А.Л. Толстик
____

СОГЛАСОВАНО
Начальник управления высшего и
среднего специального образования
Министерства образования
Республики Беларусь
________________ С.И. Романюк
____

Проректор по учебной и
воспитательной работе
Государственного учреждения
образования «Республиканский
институт высшей школы»
________________В.И. Шупляк
____

Эксперт-нормоконтролер
____
____

Минск 2014

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.И. Ильинкова — доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

В.В. Кашевский — доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.
О.А. Чупригин — доцент кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
Кафедра высшей математики №2 Учреждения образования «Белорусского национального технического университета»;
С.И. Василец – заведующий кафедрой математики физического факультета Учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 29 мая 2013 г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 27 июня 2013 г.);

Научно-методическим советом по физике Учебно-методического объединения по естественнонаучному образованию
(протокол № 1 от 12 сентября 2013 г.).

Ответственный за выпуск: В.В. Кашевский
Ответственный за редакцию: В.В. Кашевский

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Типовая учебная программа разработана в соответствии с образовательным стандартом по специальности 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)».

Математический анализ занимает центральное место в системе математической подготовки студентов физических специальностей, являясь фундаментом для изучения основ векторного и тензорного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики. Методы и аппарат математического анализа широко используются в курсах общей и теоретической физики.

Цель дисциплины — глубокое овладение фундаментальными понятиями предельного перехода, операциями дифференцирования и интегрирования в одномерном и многомерном случаях, а также прочными навыками их использования в смежных математических курсах при решении конкретных прикладных задач.

Основная задача изучения дисциплины — обеспечить глубокую общематематическую подготовку студентов физических специальностей, выработать навыки решения и исследования типовых задач математического анализа.

Программа учитывает многолетний опыт преподавания математического анализа на физическом факультете и факультете радиофизики и электроники Белорусского государственного университета. Изложение основных тем программы определяются характером вуза и наличием соответствующих технических средств обучения. В лекционном курсе следует по мере необходимости использовать современные компьютерные технологии и технические средства обучения.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия теории пределов;

– дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и многих переменных и их приложения;

уметь:

– находить пределы последовательностей и функций;

– вычислять производные и интегралы от элементарных функций;

– исследовать сходимость несобственных интегралов и рядов;

– использовать аппарат математического анализа при изучении физических явлений;

владеть:

– навыками применения математического инструментария для решения научно-практических задач.

Для организации самостоятельной работы студентов по дисциплине рекомендуется использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, основной теоретический материал, методические указания к практическим занятиям, список литературы и др.).

Результативность самостоятельной работы студентов рекомендуется проверять в ходе текущего и итогового контроля знаний в форме устного опроса, коллоквиумов, контрольных работ, тестового компьютерного контроля по темам и разделам дисциплины. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала следует использовать накопительную рейтинговую систему.
Типовым учебным планом на изучение дисциплины «Математический анализ» предусмотрено общее количество часов 268. Аудиторное количество часов 148, из них: лекции — 74 часа, практические занятия — 74 часа.
Рекомендуемая форма отчетности: 1 зачет, 1экзамен.

Примерный тематический план

№ п/п	Название темы	Лекции	Практические занятия	Всего
1	Теория пределов.	20	18	38
2	Основы дифференциального исчисления.	10	8	18
3	Неопределенный интеграл	4	8	12
4	Определенный интеграл и его приложения.	6	8	14
5	Формула Тейлора и исследование функций.	6	6	12
6	Функции многих переменных.	10	10	20
7	Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.	10	8	18
8	Теория рядов.	8	8	16
	Итого	74	74	148

Содержание учебного материала

1. Теория пределов. Основные сведения о действительных числах. Бином Ньютона. Точные границы числовых множеств. Комплексные числа. Разложение многочленов на множители. Рациональные дроби.
Числовые последовательности. Предел последовательности. Основные свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Число e .Предельные точки последовательности. Критерий сходимости последовательности. Предел последовательности комплексных чисел.
Два определения предела функции и их равносильность. Свойства пределов функций. Односторонние и несобственные пределы. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Критерий Коши. Замечательные пределы.

Непрерывные функции. Точки разрыва. Непрерывность элементарных функций. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность.

2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Дифференциал. Основные правила дифференцирования. Производные и дифференциалы высших порядков. Дифференциальные теоремы о среднем. Раскрытие неопределенностей.

Формула Тейлора. Различные виды остаточного члена. Формулы Тейлора элементарных функций.

Признаки монотонности функции. Локальный и глобальный экстремумы. Выпуклость кривой и точки перегиба. Асимптоты графика функции. Схема построения графика функции.

3. Интегральное исчисление функций одной переменной. Первообразная и неопределенный интеграл. Табличные интегралы. Основные методы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей. Метод рационализации.

Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Теоремы о среднем. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

4. **Дифференциальное исчисление функций многих переменных.** Конечномерные пространства. Предел функции многих переменных. Повторные пределы. Непрерывные функции многих переменных и их свойства. Частные производные. Дифференцируемые функции. Производные и дифференциалы сложных функций. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных. Экстремумы.

5. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы первого и второго рода. Простейшие свойства несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Непрерывность интегралов, интегрирование и дифференцирование по параметру. Интегралы Эйлера.

6. Теория рядов. Числовые ряды. Основные свойства сходящихся рядов. Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки абсолютной сходимости. Знакочередующиеся ряды и теорема Лейбница. Действия над рядами. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряды Тейлора элементарных функций.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень рекомендуемых средств диагностики знаний
Тестовые задания по отдельным разделам (темам) дисциплины;
Коллоквиумы — 3;
Устные опросы;
Контрольные работы — 4.

Рекомендуемые темы контрольных работ
Теория пределов.
Основы дифференциального исчисления.
Неопределенный интеграл.
Определенный интеграл и его приложения.
Функции многих переменных.
Несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра.
Теория рядов.

Рекомендуемые темы коллоквиумов
Теория пределов.
Основы дифференциального исчисления.
Функции многих переменных

Рекомендуемая литература

Основная
Ильин, В.А. Основы математического анализа. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк — М.: Физматлит, 2009.— 646 с.
Ильин, В.А. Основы математического анализа. Ч. 2 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк — М.: Физматлит, 2009.— 463 с.
Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1 / Л.Д. Кудрявцев — М.: Наука, 2005.— 400 с.
Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2 / Л.Д. Кудрявцев — М.: Наука, 2005.— 424 с.
Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц — М.: Лань, 2008.— 448 с.
Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2 / Г.М. Фихтенгольц — М.: Лань, 2008. — 464 с.
Тер-Крикоров, А.М. Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. — 672 с.
Будак, Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин — М.: Физматлит, 2011. — 510 с.
Русак, В.М. Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай / В.М. Русак, Л.І. Шлома, В.К. Ахраменка, А.А. Крачкоўскі — Мн.: Вышэйшая школа, 1994.— 431 с.

Русак, В.М. Курс вышэйшай матэматыкі. Функцыі некалькіх зменных. Інтэгральнае злічэнне. Шэрагі / В.М. Русак, Л.І. Шлома, В.К. Ахраменка, А.А. Крачкоўскі — Мн.: Вышэйшая школа, 1997.— 505 с.
Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович — М.: АСТ, 2009. — 560 с.
Абрашына-Жадаева , Н.Р. Вышэйшая матэматыка ў прыкладах і задачах. Ч.1. Матэматычны аналіз / Н.Р.Абрашына-Жадаева, В.К. Ахраменка, С.С. Беляўскі, Л.Л. Бярозкіна, А.А. Чупрыгін — Мн.: БДУ, 2007. — 154 с.

Дополнительная литература

Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу. Ч. 1 / Ю.С. Богданов — Мн.: БГУ, 1974. — 178 с.
Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу. Ч. 2 / Ю.С. Богданов — Мн.: БГУ, 1974. — 178 с.